Devoir maison n°07 – mathématiques
Donné le 21/11/2017 – à rendre le 28/11/2017

Exercice 1

1. En posant $t = x^2$, on obtient $x^4 = (x^2)^2 = t^2$.
   Alors (E) se ramène à l'équation $6t^2 + 39t - 21 = 0$.
2. On calcule : $\Delta = b^2 - 4ac = 39^2 - 4 \times 6 \times (-21) = 2025 = 45^2 > 0$.
   Il y a donc deux solutions :
   $$t_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-39 - 45}{2 \times 6} = \frac{-84}{12} = -7 \text{ et } t_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-39 + 45}{12} = \frac{1}{2}$$
3. On a posé $t = x^2$ et on a trouvé deux valeurs de t, -7 et $\frac{1}{2}$.
   On doit donc résoudre : $x^2 = -7$ et $x^2 = \frac{1}{2}$.
   La première équation n'a pas de solution (un carré ne peut pas être négatif).
   La seconde a pour solutions $\sqrt{\frac{1}{2}}$ et $-\sqrt{\frac{1}{2}}$. On peut noter : $\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
   L'ensemble de solutions de l'équation (E) est donc :
   $$\left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$$

Exercice 2

1. On a :
   $$\begin{aligned}
   \overrightarrow{AE} &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} && \text{(Chasles)} \\
   &= \overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{DC} \\
   &= \overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{AB} && \text{car } ABCD \text{ et un parallélogramme} \\
   &= 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}
   \end{aligned}$$
2. De même :
   $$\begin{aligned}
   \overrightarrow{AF} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} && \text{(Chasles)} \\
   &= \overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{BC} \\
   &= \overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AD} && \text{car } ABCD \text{ est un parallélogramme}
   \end{aligned}$$
3. D'après les deux questions précédentes, on a $E(2;1)$ et $F\left(1; \frac{3}{2}\right)$.
4. Le vecteur $\overrightarrow{EF}$ dirige la droite (EF). Or $\overrightarrow{EF}(x_F - x_E; y_F - y_E)$ soit $\overrightarrow{EF}\left(-1; \frac{1}{2}\right)$.
   Donc l'équation de la droite (EF) est de la forme $\frac{1}{2}x + y + c = 0$.
   Or $E(2;1)$ appartient à (EF) donc $\frac{1}{2} \times 2 + 1 + c = 0 \Leftrightarrow 2 + c = 0 \Leftrightarrow c = -2$.
   Ainsi, (EF) a pour équation $\frac{1}{2}x + y - 2 = 0$.

5. La droite (AB) correspond à l'axe des abcisses dans le repère, donc elle a pour équation $y = 0$.
6. Le point $M(x; y)$ appartient à (EF) et à (AB) donc ses coordonnées satisfont les deux équations $y = 0$ et $\frac{1}{2}x + y - 2 = 0$.

   Alors $\frac{1}{2}x - 2 = 0$, donc $x = 2 \times 2 = 4$, et M a pour coordonnées $(4; 0)$.
7. On a $\overrightarrow{EM}(x_M - x_E; y_M - y_E)$ donc $\overrightarrow{EM}(2; -1)$. Or $\overrightarrow{EF}\left(-1; \frac{1}{2}\right)$.

   On remarque alors que $\overrightarrow{EM} = -2\overrightarrow{EF}$.
   On peut écrire aussi : $\overrightarrow{EM} = 2\overrightarrow{FE}$.
   Également, avec la relation de Chasles : $\overrightarrow{FM} = \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{EM} = \overrightarrow{FE} + 2\overrightarrow{FE} = 3\overrightarrow{FE}$.