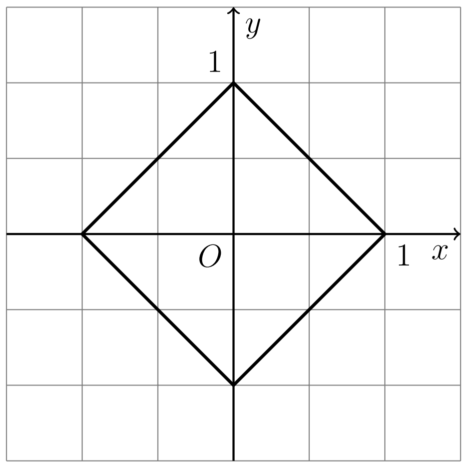
LYCÉE ALFRED KASTLER **1S**
2017–2018

Devoir maison n°10 – mathématiques
Correction

Exercice 1
On cherche l'ensemble des points $M(x;y)$ tels que $|x|+|y|=1$. Quatre cas se présentent :

- $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$: $|x|+|y|=x+y$ Alors $|x|+|y|=1 \Leftrightarrow x+y=1 \Leftrightarrow y=1-x$.
  On obtient un segment de droite dans le quadrant supérieur droit du plan.
- $x \leqslant 0$ et $y \geqslant 0$: $|x|+|y|=-x+y$ Alors $|x|+|y|=1 \Leftrightarrow -x+y=1 \Leftrightarrow y=1+x$.
  On obtient un segment de droite dans le quadrant supérieur gauche du plan.
- $x \geqslant 0$ et $y \leqslant 0$: $|x|+|y|=x-y$ Alors $|x|+|y|=1 \Leftrightarrow x-y=1 \Leftrightarrow y=x-1$.
  On obtient un segment de droite dans le quadrant inférieur droit du plan.
- $x \leqslant 0$ et $y \leqslant 0$: $|x|+|y|=-x-y$ Alors $|x|+|y|=1 \Leftrightarrow -x-y=1 \Leftrightarrow y=-x-1$.
  On obtient un segment de droite dans le quadrant inférieur gauche du plan.

La représentation de l'ensemble E est alors la suivante :



Exercice 2

1. Pour déterminer les variations de f, qui est une fonction polynomiale de degré 2, on commence par déterminer l'abscisse du sommet : $x=\dfrac{-b}{2a}=\dfrac{-2}{2\times(-1)}=1$.
   L'ordonnée est alors $f(1)=-1^2+2\times 1+3=4$.
   De plus, $a=-1<0$, donc les branches de la parabole sont tournées vers le bas.
   Le tableau de variation de f est alors le suivant :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
variations de f	$\nearrow$	4	$\searrow$

2. La fonction g étant également polynomiale de degré 2, pour déterminer ses racines on commence par calculer son discriminant :
   $\Delta=b^2-4ac=(-4)^2-4\times 1\times 3=16-12=4=2^2>0$.
   Il y a donc deux racines :
   $$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{4-2}{2}=1 \quad \text{et} \quad x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{4+2}{2}=3$$
   La fonction g a donc deux racines : 1 et 3.

3. (a) On a $f(x)-g(x) = -x^2+2x+3-(x^2-4x+3) = -x^2+2x+3-x^2+4x-3 = -2x^2+6x$.
Il s'agit à nouveau d'une expression polynomiale de degré 2.
Pour en étudier le signe, il nous faut déjà les racines de cette expression.
Or on peut observer que $f(x)-g(x) = x(-2x+6) = -2x(x-3)$.
La forme factorisée de l'expression nous donne alors les racines : 0 et 3.
Comme de plus $a = -2 < 0$, on obtient le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
signe de $f(x)-g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

(b) D'après le tableau précédent, on peut affirmer que sur $]-\infty;0]\cup[3;+\infty[$, $\mathcal{C}_f$ est située en dessous de $\mathcal{C}_g$, alors que sur $[0;3]$, $\mathcal{C}_f$ est située au dessus $\mathcal{C}_g$.