Devoir maison n°12 – mathématiques
Donné le 06/02/2018 – à rendre le 13/02/2018

**Exercice 1**

1. On a :

$$\begin{aligned} x > 3 &\Leftrightarrow x-1 > 2 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{x-1} < \frac{1}{2} && \text{car la fonction inverse est décroissante sur } ]0;+\infty[ \\ &\Leftrightarrow \frac{2}{x-1} < \frac{2}{2} = 1 \\ &\Leftrightarrow -5 + \frac{2}{x-1} < -4 \end{aligned}$$

2. On a :

$$\begin{aligned} x < -1 &\Leftrightarrow x^2 > (-1)^2 = 1 && \text{car la fonction carré est décroissante sur } ]-\infty;0] \\ &\Leftrightarrow x^2+1 > 2 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{x^2+1} < \frac{1}{2} && \text{car la fonction inverse est décroissante sur } ]0;+\infty[ \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{x^2+1} - 2 < \frac{1}{2} - 2 = \frac{-3}{2} \end{aligned}$$

3. On a :

$$\begin{aligned} x \geqslant 7 &\Leftrightarrow x-3 \geqslant 4 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x-3} \geqslant \sqrt{4} = 2 && \text{car la fonction racine carrée est croissante sur } [0;+\infty[ \\ &\Leftrightarrow -5\sqrt{x-3} \leqslant -5 \times 2 = -10 && \text{car } -5 < 0 \end{aligned}$$

4. On a :

$$\begin{aligned} -2 < x < -1 &\Leftrightarrow 4 > x^2 > 1 && \text{car la fonction carré est décroissante sur } ]-\infty;0] \\ &\Leftrightarrow 9 > x^2+5 > 6 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{9} < \frac{1}{x^2+5} < \frac{1}{6} && \text{car la fonction inverse est décroissante sur } ]0;+\infty[ \\ &\Leftrightarrow \frac{-2}{9} > \frac{-2}{x^2+5} > \frac{-2}{6} = \frac{-1}{3} \end{aligned}$$

**Exercice 2**
Multiplier une inéquation par un réel $a$ c'est appliquer la fonction linéaire $x \mapsto ax$.
Or on sait que les variations de cette fonction dépendent du signe de $a$.
Plus précisément :

- Si $a < 0$, alors la fonction est décroissante, et on change le sens de l'inégalité ;
- Si $a > 0$, alors la fonction est croissante, et on conserve le sens de l'inégalité.

On retrouve bien la règle connue.

**Exercice 3**
On sait, d'après le cours, que :

- Pour $0 \leqslant x \leqslant 1$, $\sqrt{x} \geqslant x$ ;
- Pour $x \geqslant 1$, $x \geqslant \sqrt{x}$

Ainsi :

- Pour $0 \leqslant x \leqslant 1$,

$$\begin{aligned} \sqrt{x} \geqslant x &\Leftrightarrow 2+\sqrt{x} \geqslant 2+x \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2+\sqrt{x}} \leqslant \frac{1}{2+x} \qquad \text{car la fonction inverse est décroissante sur } ]0;+\infty[ \\ &\Leftrightarrow f(x) \leqslant g(x) \end{aligned}$$

- Pour $x \geqslant 1$,

$$\begin{aligned} x \geqslant \sqrt{x} &\Leftrightarrow 2+x \geqslant 2+\sqrt{x} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2+x} \leqslant \frac{1}{2+\sqrt{x}} \qquad \text{car la fonction inverse est décroissante sur } ]0;+\infty[ \\ &\Leftrightarrow g(x) \leqslant f(x) \end{aligned}$$