Devoir maison n°13 – mathématiques
Correction

Exercice 1

f est de la forme uv avec $u(x) = \dfrac{1}{x}$ et $v(x) = 5x^2 - 3x + 2$.
Alors $u'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ et $v'(x) = 5 \times (2x) - 3 \times 1 + 0 = 10x - 3$.
On a $(uv)' = u'v + uv'$, donc

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{1}{x^2}(5x^2 - 3x + 2) + \frac{1}{x}(10x - 3) \\ &= \frac{-(5x^2 - 3x + 2)}{x^2} + \frac{10x - 3}{x} \\ &= \frac{-5x^2 + 3x - 2 + x(10x - 3)}{x^2} \\ &= \frac{-5x^2 + 3x - 2 + 10x^2 - 3x}{x^2} \\ &= \frac{5x^2 - 2}{x^2} \end{aligned}$$

Exercice 2

1. (a) f est de la forme $\dfrac{1}{v}$ avec $v(x) = x - 2$.
   Alors $v'(x) = 1$ et comme $\left(\dfrac{1}{v}\right)' = \dfrac{-v'}{v^2}$, $f'(x) = \dfrac{-1}{(x-2)^2}$.
   g est de la forme $\dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = 4x - 7$ et v la même fonction que précédemment.
   Alors $u'(x) = 4$ et comme $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$,
   $g'(x) = \dfrac{4(x-2) - (4x-7) \times 1}{(x-2)^2} = \dfrac{4x - 8 - 4x + 7}{(x-2)^2} = \dfrac{-1}{(x-2)^2}$

   (b) On remarque que $f'(x) = g'(x)$.

2. (a) On a

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= \frac{1}{x-2} - \frac{4x-7}{x-2} = \frac{1 - (4x-7)}{x-2} \\ &= \frac{1 - 4x + 7}{x-2} = \frac{-4x + 8}{x-2} = \frac{-4(x-2)}{x-2} \\ &= -4 \end{aligned}$$

   (b) D'après les calculs précédents, $f - g$ est constante (égale à -4), donc sa dérivée est nulle : quelque soit $x \in \mathbb{R}$, $(f - g)'(x) = 0$.
   Or $(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x)$.
   Ainsi, quelque soit $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) - g'(x) = 0$, autrement dit $f'(x) = g'(x)$.

Exercice 3

1. On a $f'(x) = -4x^3 + 2 \times (2x) + 1 = -4x^3 + 4x + 1$.
2. D'après le cours, T a pour équation $y = f'(-1)(x - (-1)) + f(-1)$.
   Or $f'(-1) = -4(-1)^3 + 4(-1) + 1 = 4 - 4 + 1 = 1$
   et $f(-1) = -(-1)^4 + 2(-1)^2 + (-1) = -1 + 2 - 1 = 0$.
   Alors (T) a pour équation $y = 1(x + 1) + 0 = x + 1$.

3. Pour tout réel a, la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a a pour coefficient directeur $f'(a)$.
Deux droites sont parallèles si et seulement si elles ont le même coefficient directeur.
Or (T) a pour coefficient directeur $f'(-1) = 1$.
Répondre à la question revient alors à résoudre l'équation $f'(a) = 1$.
Or :

$$\begin{aligned}
f'(a) = 1 &\Leftrightarrow -4x^3 + 4x + 1 = 1 \\
&\Leftrightarrow -4x^3 + 4x = 0 \\
&\Leftrightarrow 4x(-x^2 + 1) = 0 \\
&\Leftrightarrow 4x = 0 \text{ ou } -x^2 + 1 = 0 \\
&\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x^2 = 1 \\
&\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = -1 \text{ ou } x = 1
\end{aligned}$$

Ainsi l'ensemble des valeurs de a recherchées est $\{-1; 0; 1\}$.