LYCÉE ALFRED KASTLER **1S**
2017–2018

Devoir maison n°14 – mathématiques
Correction

Exercice 1

1. On a $d(x) = 1{,}6x + 2{,}4 - 4\sqrt{x}$, donc :
$d'(x) = 1{,}6 \times 1 + 0 - 4 \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = 1{,}6 - 2 \times \dfrac{1}{\sqrt{x}} = \dfrac{1{,}6\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x}}$

2. (a) La fonction racine carrée ($u : x \mapsto \sqrt{x}$) est croissante sur $[0; +\infty[$ Alors $1{,}6u$ est également croissante sur $[0; +\infty[$ (car $1{,}6 > 0$), donc $h = 1{,}6u - 2$ est également croissante sur $[0; +\infty[$ (on soustrait 2).
Autre manière de le démontrer : $h'(x) = 1{,}6 \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}} > 0$ (car une racine carrée est toujours positive), donc h est croissante sur $[0; +\infty[$.

(b) On résout : $h(x) = 0 \Leftrightarrow 1{,}6\sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \dfrac{2}{1{,}6} = \dfrac{5}{4} \Leftrightarrow x = \left(\dfrac{5}{4}\right)^2 = \dfrac{25}{16}$.
La fonction h s'annule en un réel $\alpha = \dfrac{25}{16}$.

(c) Puisque h est croissante et qu'elle s'annule en α, alors $h(x)$ est négative sur $[0; \alpha]$ et positive sur $[\alpha; +\infty[$.

3. On remarque que $d'(x) = \dfrac{h(x)}{\sqrt{x}}$. Or $\sqrt{x} > 0$ car c'est une racine carrée. Donc d' est du signe de h. On a alors :

x	0		α		$+\infty$
Signe de $d'(x)$		$-$	0	$+$	
variations de d	$2{,}4$	$\searrow$	$-0{,}1$	$\nearrow$	

On a $d(\alpha) = d\left(\dfrac{25}{16}\right) = 1{,}6 \times \dfrac{25}{16} + 2{,}4 - 4\sqrt{\dfrac{25}{16}} = 2{,}5 + 2{,}4 - 4 \times \dfrac{5}{4} = 4{,}9 - 5 = -0{,}1$

4. (a) On a $d(1) = 1{,}6 \times 1 + 2{,}4 - 4\sqrt{1} = 1{,}6 + 2{,}4 - 4 = 4 - 4 = 0$
et $d(2{,}25) = d\left(\dfrac{9}{4}\right) = 1{,}6 \times \dfrac{9}{4} + 2{,}4 - 4\sqrt{\dfrac{9}{4}} = 0{,}4 \times 9 + 0{,}4 + 2 - 4 \times \dfrac{3}{2} = 4 + 2 - 2 \times 3 = 6 - 6 = 0$.

(b) Compte tenu des variations de $d = g - f$, comme d s'annule en 1 et en 2,25, on en déduit :
- Sur $[0; 1]$ et sur $[2{,}25; +\infty[$, $d(x) \geqslant 0$ donc $\mathcal{C}_g$ est au dessus de $\mathcal{C}_f$;
- Sur $[1; 2{,}25]$, $d(x) \leqslant 0$ $\mathcal{C}_g$ est en dessous de $\mathcal{C}_f$.

5. On pose $X = \sqrt{x}$. Alors $X^2 = x$, et $d(x) = 0 \Leftrightarrow 1{,}6X^2 + 2{,}4 - 4X = 0$.
On se retrouve alors avec une équation du second degré, avec $a = 1{,}6$, $b = -4$ et $c = 2{,}4$.
On calcule : $\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 1{,}6 \times 2{,}4 = 16 - \dfrac{6 \times 4^4}{100} = 16 - 15{,}36 = 0{,}64 = 0{,}8^2 > 0$
Il y a deux racines : $X_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{4 - 0{,}8}{2 \times 1{,}6} = 1$ et $X_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{4 + 0{,}8}{3{,}2} = 1{,}5$.
Comme $x = X^2$, on obtient deux solutions : $x_1 = 1^2 = 1$ et $x_2 = 1{,}5^2 = 2{,}25$.