

Devoir maison n°17 – mathématiques
Correction**Exercice 1**

Des renseignements de l'énoncé, on peut déduire que f vérifie les égalités suivantes :

$$\begin{cases} f(0) = 3 \\ f(10) = 0 \\ f'(0) = 0 \\ f'(10) = 0 \end{cases}$$

Les deux premières égalités traduisent le fait que la courbe passe par M et par N .

Les deux dernières égalités traduisent le fait que les tangentes en 0 et en 10 sont horizontales.

Or $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, alors $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

Ainsi, le système devient :

$$\begin{cases} d = 3 \\ 1\,000a + 100b + 10c + d = 0 \\ c = 0 \\ 300a + 20b + c = 0 \end{cases}$$

On a déjà les valeurs de d et de c , donc le système se simplifie :

$$\begin{cases} c = 0 \\ d = 3 \\ 1\,000a + 100b + 3 = 0 \\ 300a + 20b = 0 \end{cases}$$

En multipliant la dernière ligne par 5 et en soustrayant la troisième ligne (pour éliminer l'inconnue b), on obtient : $500a - 3 = 0$, ainsi $a = \frac{3}{500}$.

En remplaçant alors dans la dernière ligne, et en isolant b on trouve :

$$b = -\frac{300}{20} \times \frac{3}{500} = -\frac{9}{100}.$$

Au final, on obtient $f(x) = \frac{3}{500}x^3 - \frac{9}{100}x^2 + 3$.

Exercice 2

1. L'affirmation est **fausse** :

Par exemple, considérons la variable X dont la loi de probabilité est la suivante :

x_i	-10	10
$\mathbb{P}(X = x_i)$	0,1	0,9

Alors $E(X) = -10 \times 0,1 + 10 \times 0,9 = -1 + 9 = 8 > 0$, pourtant X ne prend pas que des valeurs positives. Si X est une variable aléatoire telle que $E(X) > 0$, alors toutes les valeurs prises par X sont positives.

2. L'affirmation est **vraie** :

Soit x_i (pour i allant de 1 à n) les valeurs prises par X .

On sait que $V(X) = \sum_{i=1}^n (x_i - E(X))^2 \times \mathbb{P}(X = x_i)$.

Ainsi, $V(X)$ est une somme de nombres tous positives (les carrés et les probabilités sont positifs).

Si $V(X) = 0$, on en déduit que chaque terme $(x_i - E(X))^2 \times \mathbb{P}(X = x_i)$ de la somme doit être nul.

Comme les x_i sont les valeurs prises par X , les probabilités sont non nulles. On en déduit alors que $x_i - E(X) = 0$, autrement dit que $x_i = E(X)$. Or $E(X)$ ne dépend pas de i , donc on en déduit qu'il n'existe qu'une seule valeur x_i , que l'on peut noter m (et qui est l'espérance de X).

Autrement dit, X ne prend bien qu'une seule valeur : celle de m .

3. L'affirmation est **fausse** :

De manière générale, on a la loi suivante si X ne prend que deux valeurs a et b :

x_i	a	b
$\mathbb{P}(X = x_i)$	p	$1 - p$

où p est un réel compris (strictement) entre 0 et 1.

Alors $E(X) = 0 \Leftrightarrow ap + b(1 - p) = 0 \Leftrightarrow a = \frac{1 - p}{p}b$.

Il suffit de choisir $p \neq 0,5$ pour montrer que l'affirmation est fausse.

Par exemple, $p = 0,1$, alors $a = \frac{0,9}{0,1}b = 9b$.

En choisissant n'importe quelle valeur de a (non nulle), on observera que $b \neq -a$.

Par exemple, si $a = 9$, alors $b = 1 \neq -9$.