

Devoir surveillé n°1 – mathématiques
Correction**Exercice 1**

1. (a) On a :

$$\begin{aligned}
 f(x) &= -2 \left(x^2 + \frac{4}{-2}x + \frac{6}{-2} \right) \\
 &= -2(x^2 - 2x - 3) \\
 &= -2((x-1)^2 - 1^2 - 3) \\
 &= -2((x-1)^2 - 4) \\
 &= -2(x-1)^2 + 8
 \end{aligned}$$

(b) $f(x) = -2(x-1)^2 + 8$ est de la forme $a(x-\alpha)^2 + \beta$ avec $\alpha = 1$ et $\beta = 8$.
Les coordonnées du sommet sont $(\alpha; \beta)$, donc $(1; 8)$.

2. (a) Pour obtenir les racines de f , on commence déjà par le calcul du discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \times (-2) \times 6 = 16 + 48 = 64 = 8^2 > 0$$

$$\text{Il y a alors deux racines : } x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 - \sqrt{8^2}}{2 \times (-2)} = \frac{-4 - 8}{-4} = \frac{-12}{-4} = 3$$

$$\text{et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 + 8}{-4} = \frac{4}{-4} = -1.$$

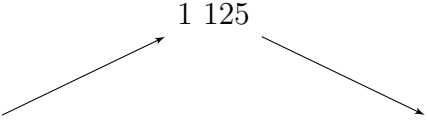
(b) La forme factorisée de $f(x)$ est donc $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2) = -2(x-3)(x+1)$.

Exercice 21. (a) L'abscisse du sommet est $t = \frac{-b}{2a} = \frac{-50}{2 \times (-5)} = 5$.

Son ordonnée est alors $N(5) = -5 \times 5^2 + 50 \times 5 + 1\,000 = -125 + 250 + 1\,000 = 1\,125$.

De plus, $a = -5 < 0$ donc les branches sont orientées vers le bas.

On obtient alors le tableau de variations suivant :

t	$-\infty$	5	$+\infty$
variations de N	$1\,125$ 		

(b) Pour établir le tableau de signes, nous devons déterminer les racines de N .

On calcule alors $\Delta = b^2 - 4ac = 50^2 - 4 \times (-5) \times 1\,000 = 2\,500 + 20\,000 = 22\,500 = 150^2 > 0$.

$$\text{Il y a donc deux racines, } t_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-50 - \sqrt{150^2}}{2 \times (-5)} = \frac{-50 - 150}{-10} = 20$$

$$\text{et } t_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-50 + 150}{-10} = -10.$$

De plus, $a = -5 < 0$, donc le tableau de signes est le suivant :

t	$-\infty$	-10	20	$+\infty$
signe de $N(t)$	-	0	+	0

Les solutions de l'inéquation $N(t) \geq 0$ sont alors : $\mathcal{S} = [-10; 20]$.

2. (a) D'après le tableau de variations, le nombre maximal de bactéries observables est 1 125.
- (b) Il n'y a plus de bactérie au temps t pour lequel $N(t) = 0$. Or les racines de N sont -10 et 20 , et nous cherchons une valeur positive. Donc il faut 20 minutes pour tuer l'ensemble des bactéries.

Exercice 3

1. On a $\Delta = b^2 - 4ac$. Si a et c sont de signe contraire, alors $ac < 0$, donc $-4ac > 0$.
Or $b^2 \geq 0$, donc $\Delta > 0$: la proposition est **vraie**.
2. La proposition est **fausse**.
Si $\Delta < 0$, on sait que $f(x)$ est du signe de a . Or a peut être positif.
On peut donner comme exemple : $x^2 + 1$. $\Delta = -4 < 0$, pourtant $x^2 + 1 > 0$.
3. La proposition est **fausse**.
Il suffit de donner deux fonctions sous forme factorisée avec un coefficient a différent :

$$f(x) = (x - 1)(x - 2) \text{ et } g(x) = -(x - 1)(x - 2)$$

f et g ont les mêmes racines (1 et 2) mais ne sont pas égales (elles sont opposées).

Exercice 4

$f(x) = \frac{1}{2}(x - 2)^2 - 2$ est de la forme $a(x - \alpha)^2 + \beta$ avec $a = \frac{1}{2}$, $\alpha = 2$ et $\beta = -2$.

Comme $a > 0$, les branches sont tournées vers le haut, et $(2; -2)$ sont les coordonnées du sommet. Ces deux arguments permettent d'identifier \mathcal{C}_1 comme étant la courbe représentative de f .

$g(x) = -2(x + 1)(x - 2)$ est de la forme $a(x - x_1)(x - x_2)$ avec $a = -2$, $x_1 = -1$ et $x_2 = 2$.

Comme $a < 0$, les branches sont tournées vers le bas, et -1 et 2 sont les abscisses des points d'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses. Ces deux arguments permettent d'identifier \mathcal{C}_2 comme étant la courbe représentative de g .

On peut aussi calculer des images, par exemple celle de 0, par les deux fonctions.