Devoir surveillé n°1 – mathématiques
Correction

Exercice 1

1. (a) On a :

$$\begin{aligned} f(x) &= -2\left(x^2 + \frac{4}{-2}x + \frac{6}{-2}\right) \\ &= -2(x^2 - 2x - 3) \\ &= -2\left((x-1)^2 - 1^2 - 3\right) \\ &= -2\left((x-1)^2 - 4\right) \\ &= -2(x-1)^2 + 8 \end{aligned}$$

(b) $f(x) = -2(x-1)^2 + 8$ est de la forme $a(x-\alpha)^2 + \beta$ avec $\alpha = 1$ et $\beta = 8$.
Les coordonnées du sommet sont $(\alpha;\beta)$, donc $(1;8)$.

2. (a) Pour obtenir les racines de f, on commence déjà par le calcul du discriminant :
$\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \times (-2) \times 6 = 16 + 48 = 64 = 8^2 > 0$
Il y a alors deux racines : $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-4-\sqrt{8^2}}{2\times(-2)} = \dfrac{-4-8}{-4} = \dfrac{-12}{-4} = 3$
et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-4+8}{-4} = \dfrac{4}{-4} = -1$.

(b) La forme factorisée de $f(x)$ est donc $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2) = -2(x-3)(x+1)$.

Exercice 2

1. (a) L'abscisse du sommet est $t = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-50}{2\times(-5)} = 5$.
Son ordonnée est alors $N(5) = -5 \times 5^2 + 50 \times 5 + 1\ 000 = -125 + 250 + 1\ 000 = 1\ 125$.
De plus, $a = -5 < 0$ donc les branches sont orientées vers le bas.
On obtient alors le tableau de variations suivant :

t	$-\infty$	5	$+\infty$
variations de N	$\nearrow$	$1\ 125$	$\searrow$

(b) Pour établir le tableau de signes, nous devons déterminer les racines de N.
On calcule alors $\Delta = b^2 - 4ac = 50^2 - 4\times(-5)\times 1\ 000 = 2\ 500 + 20\ 000 = 22\ 500 = 150^2 > 0$.
Il y a donc deux racines, $t_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-50-\sqrt{150^2}}{2\times(-5)} = \dfrac{-50-150}{-10} = 20$
et $t_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-50+150}{-10} = -10$.
De plus, $a = -5 < 0$, donc le tableau de signes est le suivant :

t	$-\infty$		-10		20		$+\infty$
signe de $N(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Les solutions de l'inéquation $N(t) \geqslant 0$ sont alors : $\mathcal{S} = [-10; 20]$.

2. (a) D'après le tableau de variations, le nombre maximal de bactéries observables est 1 125.

   (b) Il n'y a plus de bactérie au temps t pour lequel $N(t) = 0$. Or les racines de N sont -10 et 20, et nous cherchons une valeur positive. Donc il faut 20 minutes pour tuer l'ensemble des bactéries.

Exercice 3

1. On a $\Delta = b^2 - 4ac$. Si a et c sont de signe contraire, alors $ac < 0$, donc $-4ac > 0$.
   Or $b^2 \geqslant 0$, donc $\Delta > 0$: la proposition est **vraie**.
2. La proposition est **fausse**.
   Si $\Delta < 0$, on sait que $f(x)$ est du signe de a. Or a peut être positif.
   On peut donner comme exemple : $x^2 + 1$. $\Delta = -4 < 0$, pourtant $x^2 + 1 > 0$.
3. La proposition est **fausse**.
   Il suffit de donner deux fonctions sous forme factorisée avec un coefficient a différent :

   $$f(x) = (x-1)(x-2) \text{ et } g(x) = -(x-1)(x-2)$$

   f et g ont les mêmes racines (1 et 2) mais ne sont pas égales (elles sont opposées).

Exercice 4

$f(x) = \dfrac{1}{2}(x-2)^2 - 2$ est de la forme $a(x-\alpha)^2 + \beta$ avec $a = \dfrac{1}{2}$, $\alpha = 2$ et $\beta = -2$.
Comme $a > 0$, les branches sont tournées vers le haut, et $(2; -2)$ sont les coordonnées du sommet.
Ces deux arguments permettent d'identifier $\mathcal{C}_1$ comme étant la courbe représentative de f.
$g(x) = -2(x+1)(x-2)$ est de la forme $a(x-x_1)(x-x_2)$ avec $a = -2$, $x_1 = -1$ et $x_2 = 2$.
Comme $a < 0$, les branches sont tournées vers le bas, et -1 et 2 sont les abscisses des points d'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses. Ces deux arguments permettent d'identifier $\mathcal{C}_2$ comme étant la courbe représentative de g.
On peut aussi calculer des images, par exemple celle de 0, par les deux fonctions.