**LYCÉE ALFRED KASTLER** **1S**
**2017–2018**

Devoir surveillé n°3 – mathématiques
Correction

## Exercice 1

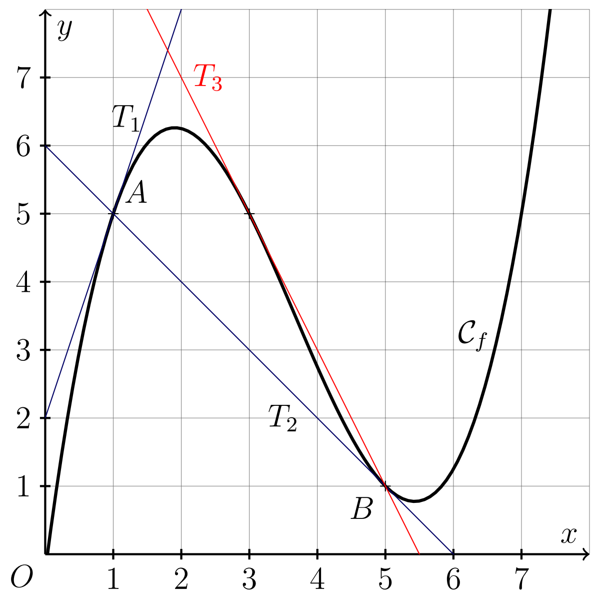
1. Graphiquement, on lit directement les images : $f(1) = 5$ et $f(5) = 1$.
   Les nombres dérivés sont les coefficients directeurs des tangentes :
   $f'(1) = \dfrac{3}{1} = 3$ et $f'(5) = \dfrac{-1}{1} = -1$.
2. pour obtenir une équation de la tangente $T_2$ de la forme $y = xm + p$, on détermine :
   - son coefficient directeur obtenu précédemment ($m = f'(5) = -1$) ;
   - son ordonnée à l'origine lue graphiquement ($p = 6$).

   Alors $T_2$ a pour équation : $y = -x + 6$.
   Sinon on utilise la formule du cours :
   $y = f'(5)(x-5) + f(5) = -1(x-5) + 1 = -x + 5 + 1 = -x + 6$
3.
   (a) La tangente $T_3$ est tracée en rouge :

   (b) Le coefficient directeur de $T_3$ est $\dfrac{-2}{1} = -2$.

   (c) On sait que le coefficient directeur de $T_3$ est $f'(3)$ par définition.
   De plus, $f(3) = 5$ par lecture graphique.
   Alors la droite $T_3$ a pour équation :

$$\begin{aligned} y &= f'(3)(x-3) + f(3) \\ &= -2(x-3) + 5 \\ &= -2x + 6 + 5 = -2x + 11 \end{aligned}$$




## Exercice 2

1. On exprime :

$$\begin{aligned} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \\ &= \frac{-(1+h)^2 + 3(1+h) - 1 - (-1^2 + 3 \times 1 - 1)}{h} \\ &= \frac{-(1 + 2h + h^2) + 3 + 3h - 1 - (-1 + 3 - 1)}{h} \\ &= \frac{-1 - 2h - h^2 + 3 + 3h - 1 - 1}{h} \\ &= \frac{-h^2 + h}{h} \\ &= -h + 1 \end{aligned}$$

L'expression $-h + 1$ tend vers 1 lorsque $h$ tend vers 0, donc $f$ est dérivable en 1 et $f'(1) = 1$.

2. De même :

$$\begin{aligned}
\frac{f(a+h)-f(a)}{h} &= \frac{f(1+h)-f(1)}{h} \\
&= \frac{\dfrac{1+h}{1+h+3} - \dfrac{1}{1+3}}{h} \\
&= \frac{\dfrac{h+1}{h+4} - \dfrac{1}{4}}{h} \\
&= \frac{\dfrac{4(h+1)-1(h+4)}{4(h+4)}}{h} \\
&= \frac{4h+4-h-4}{4(h+4)} \times \frac{1}{h} \\
&= \frac{3h}{4(h+4)} \times \frac{1}{h} \\
&= \frac{3}{4(h+4)}
\end{aligned}$$

L'expression $\dfrac{3}{4(h+4)}$ tend vers $\dfrac{3}{16}$ lorsque $h$ tend vers 0,

donc $f$ est dérivable en 1 et $f'(1) = \dfrac{3}{16}$.

**Exercice 3**

1. On a, par identité remarquable $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ :
   $(\sqrt{a+h} - \sqrt{a})(\sqrt{a+h} + \sqrt{a}) = \sqrt{a+h}^2 - \sqrt{a}^2 = a + h - a = h$.
2. En multipliant numérateur et dénominateur par $(\sqrt{a+h} + \sqrt{a})$ et d'après la question précédente on a :

$$\begin{aligned}
\frac{f(a+h)-f(a)}{h} &= \frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h} \\
&= \frac{(\sqrt{a+h}-\sqrt{a}))(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})}{h(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})} \\
&= \frac{h}{h(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})}
\end{aligned}$$

3. L'expression précédente se simplifie encore (par $h$) : $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = \dfrac{1}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}$.

   Cette expression tend vers $\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a}} = \dfrac{1}{2\sqrt{a}}$ lorsque $h$ tend vers 0.

   Donc $f$ est dérivable en $a$ et $f'(a) = \dfrac{1}{2\sqrt{a}}$.

**Exercice 4**

L'algorithme donne une valeur approchée du nombre dérivée de la fonction carré en un réel $a$ donné par l'utilisateur.