**LYCÉE ALFRED KASTLER** **1S**

**2017–2018**

Devoir surveillé commun n°1 – mathématiques

Correction

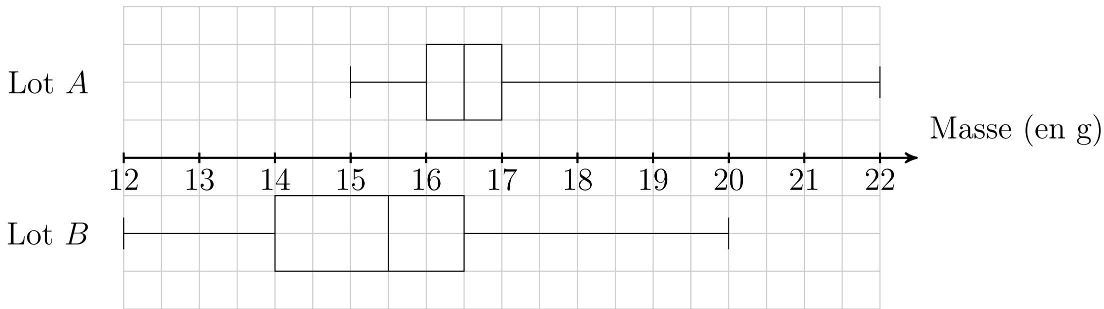
## Exercice 1

1. (a) La masse moyenne est donnée par : $\overline{x} = \dfrac{15 \times 16 + 15{,}5 \times 4 + \cdots + 22 \times 3}{100} = 16{,}81$.

   (b) D'après la calculatrice, l'écart-type est $\sigma \simeq 1{,}523$.
   La variance vaut $V = 2{,}3189$.

   (c) D'après la calculatrice, $Q_1 = 16$, $Me = 16{,}5$ et $Q_3 = 17$.

   (d) Le diagramme en boîte est donné ci-dessous :




2. (a) Le diagramme en boîte du lot $B$ est tracé ci-dessus.

   (b) Exemples de comparaisons possibles :
   Les truffières arrosées donnent des truffes globalement plus lourdes que les truffières non arrosées.
   Au moins la moitié des truffes produites dans les truffières arrosées ont une masse comprise entre 16 et 17 grammes, alors que les amplitudes pour celles provenant des truffières non arrosées sont plus importantes.
   (Par contre, il y a quelques truffes de truffières arrosées qui atteignent des masses importantes (jusqu'à 22g).)
   Le poids minimum des truffes du lot $A$ (qui est de 15g) est supérieur à celui de plus du quart de celles du lot $B$, dont environ la moitié pèse moins de 15,5g.

## Exercice 2

1. (a) le taux d'accroissement demandé est :

$$\begin{aligned} t(h) &= \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \\ &= \frac{-3(1+h)^2 + 12 - (-3 \times 1^2 + 12)}{h} \\ &= \frac{-3(1+2h+h^2) + 12 + 3 - 12}{h} \\ &= \frac{-3 - 6h - 3h^2 + 3}{h} \\ &= \frac{-6h - 3h^2}{h} \\ &= -3h - 6 \end{aligned}$$

   (b) l'expression $-3h - 6$ tend vers $-6$ lorsque $h$ tend vers 0 ($\lim\limits_{h \to 0} -3h - 6 = -6$).
   Donc $f$ est dérivable en 1 et $f'(1) = -6$.

(c) La tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $-2$ a pour équation :

$$\begin{aligned} y = f'(-2)(x-(-2)) + f(-2) &\Leftrightarrow y = 12(x+2) + (-3\times(-2)^2+12) \\ &\Leftrightarrow y = 12x + 24 - 12 + 12 \\ &\Leftrightarrow y = 12x + 24 \end{aligned}$$

(d) $f$ est une fonction polynomiale de degré 2. Pour déterminer les variations de $f$, on détermine l'abscisse du sommet : $x = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-0}{2\times -3} = 0$.
Par suite, $a = -3 < 0$, donc les branches de la parabole sont orientées vers le bas.
On a alors :

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| variations de $f$ | | $\nearrow$ | $12$ | $\searrow$ | |

On peut aussi obtenir les variations de $f$ à partir de celles de la fonction (de référence) carré :

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| variations de $k : x \mapsto x^2$ | | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | |
| variations de $-3k$ $(-3 < 0)$ | | $\nearrow$ | $0$ | $\searrow$ | |
| variations de $f = -3k + 12$ | | $\nearrow$ | $12$ | $\searrow$ | |

2. (a) $g(x) = \sqrt{f(x)}$ est définie à condition que $f(x) \geqslant 0$.
On doit donc déterminer le signe de $f$.
On calcule :$\Delta = b^2 - 4ac = 0^2 - 4\times(-3)\times 12 = 12^2 > 0$.
$f$ a donc deux racines :
$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{0-12}{2\times(-3)} = 2$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{0+12}{-6} = -2$.
**Remarque :** on peut aussi voir que $f(x) = -3x^2 + 12 = -3(x^2-4) = -3(x-2)(x+2)$.
Comme $a = -3 < 0$, on a alors le tableau de signe suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| signe de $f(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

Ainsi, $\mathcal{D}_g = [-2; 2]$.

(b) Comme $g = \sqrt{f}$, $g$ a les mêmes variations que $f$. Autrement dit :

| $x$ | $-2$ | | $0$ | | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| variations de $f$ | $0$ | $\nearrow$ | $12$ | $\searrow$ | $0$ |
| variations de $g = \sqrt{f}$ | $0$ | $\nearrow$ | $\sqrt{12}$ | $\searrow$ | $0$ |

3. (a) On a $f(x) - h(x) = -3x^2 + 12 - (5x + 4) = -3x^2 + 12 - 5x - 4 = -3x^2 - 5x + 8$.
Il s'agit d'une expression polynomiale de degré 2.
On calcule alors : $\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \times (-3) \times 8 = 25 + 96 = 121 = 11^2 > 0$.
Il y a alors deux racines :
$x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{5 - 11}{2 \times (-3)} = 1$ et $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{5 + 11}{-6} = \dfrac{-16}{6} = \dfrac{-8}{3}$.
De plus, $a = -3 < 0$. On obtient alors :

| $x$ | $-\infty$ | | $-8/3$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| signe de $f(x) - h(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

(b) On en déduit que sur $\left]-\infty; -\dfrac{8}{3}\right[ \cup ]1; +\infty[$ $\mathcal{C}_f$ est située en dessous de $\mathcal{C}_h$,
alors que sur $\left[-\dfrac{8}{3}; 1\right]$ $\mathcal{C}_f$ est située au dessus de $\mathcal{C}_h$.

(c) On connaît déjà les solutions de l'équation $f(x) = h(x) \Leftrightarrow f(x) - h(x) = 0$ :
d'après les questions précédentes, il s'agit de $x_1 = 1$ et $x_2 = -\dfrac{8}{3}$.
Il suffit de calculer $h(1) = \cdots = 9$ et $h\left(-\dfrac{8}{3}\right) = \cdots = -\dfrac{28}{3}$.
Les points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_h$ ont donc pour coordonnées $(1; 9)$ et $\left(-\dfrac{8}{3}; -\dfrac{28}{3}\right)$.

4. (a) On a :

$$\begin{aligned} j(x) &= \begin{cases} 5x + 4 & \text{si } 5x + 4 > 0 \\ -(5x + 4) & \text{si } 5x + 4 < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 5x + 4 & \text{si } x > -\dfrac{4}{5} \\ -5x - 4 & \text{si } x < -\dfrac{4}{5} \end{cases} \end{aligned}$$

(b) Pour résoudre $j(x) = 6$, on résout deux équations :
- $5x + 4 = 6 \Leftrightarrow 5x = 2 \Leftrightarrow x = \dfrac{2}{5}$ (qui est bien supérieur à $-\dfrac{4}{5}$)
- $-5x - 4 = 6 \leftrightarrow -5x = 10 \Leftrightarrow x = -2$ (qui est bien inférieur à $-\dfrac{4}{5}$)

Ainsi, $\mathcal{S} = \left\{-2; \dfrac{2}{5}\right\}$.

**Exercice 3**

1. Soit $A(-1; 4)$, $B(4; -1)$, $C(2; 1)$, $D(-1; -1)$ et $E(-4; -3)$. Alors :

| | | | |
|---|---|---|---|
| ☐ | $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{DE}$ sont colinéaires | ☑ | $C$ appartient à $(AB)$ |
| ☑ | $\overrightarrow{AB} = \frac{5}{2}\overrightarrow{CB}$ | ☑ | $D$ est le milieu de $[CE]$ |

2. Soit $\overrightarrow{u}(2;-5)$ et $\overrightarrow{v}(-3;4)$. Alors :

| | | | |
|---|---|---|---|
| ☑ | $\Vert\overrightarrow{u}\Vert = \sqrt{29}$ | ☑ | $\Vert\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\Vert = \sqrt{2}$ |
| ☐ | $\Vert\overrightarrow{v}\Vert = \sqrt{5}$ | ☑ | $\Vert\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\Vert = \sqrt{106}$ |

3. Soit $A(2;-1)$ et $B(7;3)$. La droite $(AB)$ a pour équation :

| | | | |
|---|---|---|---|
| ☐ | $4x-5y+13=0$ | ☐ | $5x+4y-6=0$ |
| ☐ | $5x-4y-14=0$ | ☑ | $-4x+5y+13=0$ |

4. La parallèle à la droite $(d)$ d'équation $3x-2y+3=0$ et passant par $A(2;5)$ a pour équation :

| | | | |
|---|---|---|---|
| ☐ | $3x-2y-4=0$ | ☑ | $3x-2y+4=0$ |
| ☑ | $-6x+4y-8=0$ | ☐ | $2x-5y+21=0$ |

5. Soit $(d)$ la droite d'équation $2x+7y-4=0$. Alors :

| | | | |
|---|---|---|---|
| ☑ | $\overrightarrow{u}(14;-4)$ est un vecteur directeur de $(d)$ | ☐ | $\overrightarrow{v}(-2;7)$ est un vecteur directeur de $(d)$ |
| ☐ | $(d)$ a pour coefficient directeur $-\frac{7}{2}$ | ☑ | $(d)$ a pour coefficient directeur $-\frac{2}{7}$ |