LYCÉE ALFRED KASTLER **1S**
2017–2018

Devoir surveillé n°5 – mathématiques
Correction

Exercice 1

1. On sait que u et $\sqrt{u}$ ont les mêmes variations. Ainsi, on a (seules les images changent) :

x	-5		0		2
variations de $\sqrt{u}$	1	$\nearrow$	$\sqrt{3}$	$\searrow$	0

2. (a) La fonction $\dfrac{1}{u}$ n'est pas définie si $u(x) = 0$. Or u ne s'annule qu'en $x = 2$ d'après le tableau de variations. Ainsi, $\dfrac{1}{u}$ est définie sur l'intervalle $[-5; 2[$.

   (b) On sait que u et $\dfrac{1}{u}$ ont des variations contraires. Ainsi :

x	-5		0		2
variations de $\dfrac{1}{u}$	1	$\searrow$	$\dfrac{1}{3}$	$\nearrow$	$\Vert$

Exercice 2

On a :

$$\begin{aligned}
-3 < x < -2 &\Leftrightarrow 9 > x^2 > 4 && \text{car la fonction racine carrée est décroissante sur }]-\infty; 0] \\
&\Leftrightarrow 14 > x^2 + 5 > 9 \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{14} < \frac{1}{x^2+5} < \frac{1}{9} && \text{car la fonction inverse est décroissante sur }]0; +\infty[\\
&\Leftrightarrow \frac{-3}{14} > \frac{-3}{x^2+5} > \frac{-3}{9} && \text{car } -3 < 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{-3}{14} > \frac{-3}{x^2+5} > \frac{-1}{3}
\end{aligned}$$

Exercice 3

1. On a $2\pi = \dfrac{6\pi}{3}$ et $16 = 3 \times 6 - 2$, donc $\dfrac{16\pi}{3} = 3 \times 2\pi - \dfrac{2\pi}{3}$.

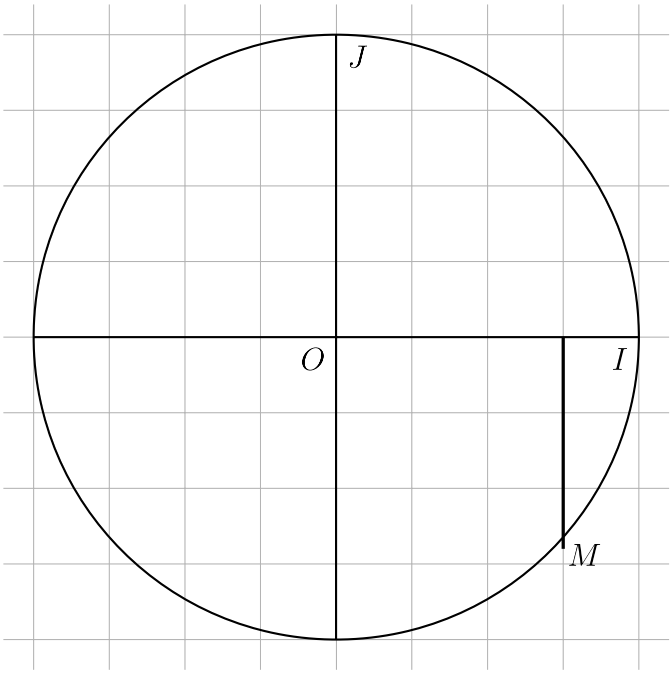
   La mesure principale de $\dfrac{16\pi}{3}$ est $-\dfrac{2\pi}{3}$.

2. L'équation $\sin(x) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ a deux solutions dans $]-\pi; \pi]$: $x = -\dfrac{2\pi}{3}$ et $x = -\dfrac{\pi}{3}$.

   Ainsi $\mathcal{S} = \left\{-\dfrac{2\pi}{3}; -\dfrac{\pi}{3}\right\}$.

   Les solutions dans $\mathbb{R}$ sont $x = -\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et $x = -\dfrac{\pi}{3} + k2\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

3. (a)



(b) On utilise la relation $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$ en remplaçant $\cos(\alpha)$ par $\dfrac{3}{4}$.

On obtient alors $\sin^2(\alpha) = 1 - \left(\dfrac{3}{4}\right)^2 = 1 - \dfrac{9}{16} = \dfrac{7}{16}$.

On sait que $\alpha \in [\pi; 2\pi]$, donc son sinus est négatif. Ainsi, $\sin(\alpha) = -\sqrt{\dfrac{7}{16}} = \dfrac{-\sqrt{7}}{4}$.

(c) D'après les formules de cours :

i. $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin(\alpha) = \dfrac{-\sqrt{7}}{4}$.

ii. $\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha) = -\dfrac{3}{4}$.

iii. $\sin(\pi + \alpha) = -\sin(\alpha) = \dfrac{\sqrt{7}}{4}$.

Exercice 4

Il suffit de démontrer que $(\overrightarrow{ER},\overrightarrow{PK}) = \pi$ (à $k2\pi$ près) pour démontrer que $\overrightarrow{ER}$ et $\overrightarrow{PK}$ sont colinéaires de sens contraire.
Pour cela, on utilise la relation de Chasles et les mesures données sur la figure :

$$\begin{aligned}
(\overrightarrow{ER},\overrightarrow{PK}) &= (\overrightarrow{ER},\overrightarrow{ET}) + (\overrightarrow{ET},\overrightarrow{TP}) + (\overrightarrow{TP},\overrightarrow{PK}) && \text{(relation de Chasles)}\\
&= (\overrightarrow{ER},\overrightarrow{TE}) + \pi + (\overrightarrow{TE},\overrightarrow{TP}) + \pi + (\overrightarrow{PT},\overrightarrow{PK}) + \pi\\
&= -(\overrightarrow{TE},\overrightarrow{ER}) + (\overrightarrow{TE},\overrightarrow{TP}) - (\overrightarrow{PK},\overrightarrow{PT}) + 3\pi\\
&= -\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} + 3\pi\\
&= -\frac{2\pi}{6} + \frac{3\pi}{6} - \frac{\pi}{6} + 3\pi\\
&= 3\pi\\
&= \pi + 1 \times 2\pi
\end{aligned}$$

Ainsi, on a bien $(\overrightarrow{ER},\overrightarrow{PK}) = \pi$, et $\overrightarrow{ER}$ et $\overrightarrow{PK}$ sont bien colinéaires de sens contraire.