Devoir surveillé n°6 – mathématiques
Correction

Exercice 1

1. g est de la forme $\dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = x^2 - 2x + 2$ et $v(x) = x - 1$.
   Alors $u'(x) = 2x - 2$ et $v'(x) = 1$.
   Par suite, $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ et :
   $g'(x) = \dfrac{(2x-2)(x-1) - (x^2 - 2x + 2) \times 1}{(x-1)^2} = \dfrac{2x^2 - 2x - 2x + 2 - x^2 + 2x - 2}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$
2. (a) On a $x - 1 + \dfrac{1}{x-1} = \dfrac{(x-1)(x-1)}{x-1} + \dfrac{1}{x-1} = \dfrac{x^2 - 2x + 1 + 1}{x-1} = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x-1} = g(x)$
   (b) Sous cette forme, g est de la forme $u + \dfrac{1}{v}$ avec $u(x) = x - 1$ et $v(x) = x - 1$.
   Alors $u'(x) = v'(x) = 1$ et $g' = u' - \dfrac{v'}{v^2}$.
   Ainsi, $g'(x) = 1 - \dfrac{1}{(x-1)^2} = \dfrac{(x-1)^2 - 1}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2 - 2x + 1 - 1}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$.
   On retrouve bien le même résultat que précédemment.
3. Comme $(x-1)^2$ est un carré, il est toujours positif.
   Ainsi, $g'(x)$ est du signe de $x^2 - 2x = x(x-2)$.
   Cette expression polynomiale de degré 2 a deux racines, $x = 0$ et $x = 2$, et $a = 1 > 0$.
   Ainsi on peut établir le tableau suivant :

x	1		2		$+\infty$
Signe de $g'(x)$		$-$	0	$+$	
variations de g	$\|\|$	$\searrow$	2	$\nearrow$	

4. On en déduit que sur $]1; +\infty[$, g a pour minimum 2, celui-ci étant atteint en $x = 2$.

Exercice 2

1. On a $f'(x) = -2x + 4$.
2. On résout : $-2x + 4 > 0 \Leftrightarrow 4 > 2x \Leftrightarrow 2 > x$.
   Ainsi :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
variations de f		$\nearrow$	2	$\searrow$	

3. (a) La formule générale de l'équation de la tangente est : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$
On remplace et on réduit :

$$\begin{aligned} y &= (-2a+4)(x-a) - a^2 + 4a - 2 \\ &= (-2a+4)x - a(-2a+4) - a^2 + 4a - 2 \\ &= (4-2a)x + 2a^2 - 4a - a^2 + 4a - 2 \\ &= (4-2a)x + a^2 - 2 \end{aligned}$$

(b) Si le point I appartient à la tangente, alors ses coordonnées satisfont l'équation.
Autrement dit $4 = (4-2a)\frac{3}{2} + a^2 - 2$. On doit alors résoudre cette équation d'inconnue a.
On la réécrit de manière à obtenir une équation polynomiale de degré 2 :

$$\begin{aligned} 4 = (4-2a)\frac{3}{2} + a^2 - 2 &\Leftrightarrow 4 = 6 - 3a + a^2 - 2 \\ &\Leftrightarrow a^2 - 3a = 0 \\ &\Leftrightarrow a(a-3) = 0 \\ &\Leftrightarrow a = 0 \text{ ou } a = 3 \end{aligned}$$

Il y a donc deux tangentes qui passent par I
Leurs équations sont : $y = 4x - 2$ (pour $a = 0$) et $y = -2x + 7$ (pour $a = 3$).

Exercice 3

1. (a) puisque la loi est équirépartie sur les issues de l'expérience, on a la loi suivante pour X :

x_i	0	2	12
$\mathbb{P}(X = x_i)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$

(b) On a $E(X) = 0 \times \frac{2}{5} + 2 \times \frac{2}{5} + 12 \times \frac{1}{5} = \frac{4}{5} + \frac{12}{5} = \frac{16}{5} = 3{,}2$

Ensuite, $V(X) = 0^2 \times \frac{2}{5} + 2^2 \times \frac{2}{5} + 12^2 \times \frac{1}{5} - \left(\frac{16}{5}\right)^2 = \frac{8}{5} + \frac{144}{5} - \frac{256}{25} = 20{,}16.$

2. (a) On a $Y = X - 2$

(b) On en déduit que $E(Y) = E(X) - 2 = 3{,}20 - 2 = 1{,}20$