Problèmes

Exercice 1
Une usine fabrique un enduit de haute résistance destiné à recouvrir les sols des endroits de forts passages comme les gares ou les aéroports.
Le coût de fabrication de cet enduit est donné, en milliers d'euros, par : $f(x) = 0{,}5x^3 - 7{,}5x^2 + 38x$. où x désigne ne nombre de tonnes d'enduit fabriqués. L'usine vend 20 000€ la tonne d'enduit. La recette pour x tonnes d'enduit vendues, exprimée en milliers d'euros, est donc définie par $r(x) = 20x$. Le bénéfice (positif ou négatif) $b(x)$ réalisé par l'usine est défini par $b(x) = r(x) - f(x)$.

1. Déterminer l'expression de $b(x)$.
2. Déterminer le bénéfice maximum réalisé par l'usine pour la vente de cet enduit et le nombre de tonnes vendues pour réaliser ce bénéfice.

Exercice 2
On veut construire des boîtes de conserves cylindriques en métal de contenance 1 L (soit 1 000 cm^3). Pour cela on utilise un rectangle pour la face latérale et deux disques pour le fond et le couvercle. On note H la hauteur de la boîte et r son rayon. Le but de ce problème est de minimiser la quantité de métal nécessaire à la fabrication d'une boîte.

1. Justifier que le rectangle (de hauteur H) est de longueur $2\pi r$.
2. Montrer que $H = \dfrac{1\,000}{\pi r^2}$.
3. Montrer que l'aire de métal nécessaire à la fabrication d'une boîte est : $A(r) = \dfrac{2\,000}{r} + 2\pi r^2$.
   Le but est alors de trouver une valeur de r qui minimise $A(r)$.
4. À l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approchée de cette valeur de r.
5. (a) Montrer que la valeur de r qui minimise l'aire totale vérifie $r^3 = \dfrac{500}{\pi}$.
   (b) En déduire la valeur approchée de r à 10^{-2} près et une valeur approchée de H.
   (c) Que remarque-t-on entre la hauteur de la boîte ainsi définie et son diamètre ?
   Démontrer ce résultat par un calcul littéral en utilisant les résultats précédents.

Exercice 3
Un maçon veut réaliser un cuve en béton parallélépipédique à base carrée et dont les parois ont pour épaisseur 30 cm, cette cuve pouvant contenir 4 m^3.
On note x le côté de la base carrée de l'intérieur de la cuve et h la hauteur intérieure de cette cuve. Le but de l'exercice est de déterminer x et h pour que le volume de béton soit minimal.

1. Montrer que le volume en béton utilisé s'exprime par : $V(x) = (x + 0{,}6)^2 \left(\dfrac{4}{x^2} + 0{,}3\right) - 4$.
2. Montrer que la dérivée de V est $V'(x) = 0{,}6 \left(1 - \dfrac{8}{x^3}\right)(x + 0{,}6)$.
3. Déterminer les variations de V.
4. En déduire les valeurs de x et de h pour que le volume de béton utilisé soit minimal.
   Déterminer ce minimum.