Chapitre :
Le second degré

⊛ **Activité :** exercices 8,9,10,11 page 6 avec rappels des cours et méthodes de seconde.
(factorisations, équations, inéquations, variations de fonctions de degré 2 niveau seconde)

I. Définitions

Définition Une fonction polynomiale de degré 2 est une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont l'expression peut s'écrire sous la forme :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

où a, b, et c sont des réels, a étant non nul.

Définition Les réels a, b, et c sont appelés les **coefficients** de la fonction polynomiale.

Remarque On dit que la fonction est de degré 2 car la plus grande puissance de x est 2.

Exemples
- $f : x \longmapsto 3x^2 + 2x - 4$ et $g : x \longmapsto 2x^2 + 3$ sont des fonctions polynomiales de degré 2.
- $h : x \longmapsto 3(x-1)^2 + 2$ est également une fonction polynomiale de degré 2.
  Pour s'en convaincre il suffit de développer l'expression.
- $h : x \longmapsto x^3 + 2x + 5$ n'en est pas une (elle est de degré 3).
- $l : x \longmapsto 2x + 4$ non plus (elle est affine, donc de degré 1).

Définition Soit f une fonction polynomiale et x un réel tel que $f(x) = 0$.
On dit que x est une **racine** de f.

Étudier une fonction polynomiale de degré 2 peut consister à :
- établir son tableau de variations puis tracer sa courbe représentative ;
- chercher d'éventuelles racines ;
- déterminer son signe en fonction des valeurs de x.

II. Représentation graphique

Rappel Soit $f : x \longmapsto ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$. Alors $\mathcal{C}_f$ est une **parabole**.

Le **sommet** de la parabole est atteint en $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$, ses coordonnées sont donc $(x_0; f(x_0))$.
- Si a est négatif, les **branches** sont orientées vers le bas et (f est croissante puis décroissante) et $f(x_0)$ est un maximum.
- Si a est positif, les **branches** sont orientées vers le haut (f est décroissante puis croissante) et $f(x_0)$ est un minimum.

De plus, la courbe admet pour axe de symétrie la droite (verticale) d'équation $x = -\dfrac{b}{2a}$.

Exemple Étudier les variations de $g(x) = -2(x+5)(x-2)$.

▶ **Exercice :** 16p16

III. Forme canonique, discriminant

⊛ **Activité :** 1p8 (méthode d'Al Khawarizmi)
De manière générale, avec $a \neq 0$, on peut écrire :

$$\begin{aligned} f(x) = ax^2 + bx + c &= a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right] \\ &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] \\ &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{4ac}{4a^2}\right] \\ &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] \end{aligned}$$

Définition Soit $\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$. On appelle Δ le **discriminant** de la fonction f.
On a alors :

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

Cette expression est appelée la **forme canonique** de f.

Exemple Calculer le discriminant et obtenir la forme canonique de $f(x) = 2x^2 + 12x - 5$.

▶ **Exercices :** 22,23p17 (calcul de Δ)

▶ **Exercices :** 3,4p16 et 20p17 (forme canonique)

Remarque Il existe une autre écriture de la forme canonique, en distribuant a :

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$$

En notant $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = -\dfrac{\Delta}{4a}$, on a alors : $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$.
On peut remarquer que (α,β) sont les coordonnées du sommet de la parabole. Sous cette forme, on peut donc identifier a et les coordonnées du sommet, et donc établir le tableau de variations de f.

▶ **Exercice :** 17p16

IV. Factorisation, racines et signe

⊛ **Activité :** 2p8 (observation du lien entre Δ et les racines)

La possibilité de factoriser dépend du signe de Δ. Les racines et le signe en découlent.

Propriété

- Si $\Delta < 0$ alors $\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}\right] > 0$ et le trinôme n'a pas de racine et est du signe de a.
- Si $\Delta = 0$ alors $P(x) = a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2$ et le trinôme n'a qu'une racine (dite double) : $x = -\dfrac{b}{2a}$.
  Le signe de P est celui de a (puisque le carré est positif).
- Si $\Delta > 0$, alors Δ a une racine carrée et $\dfrac{\Delta}{4a^2} = \left(\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2$. Ainsi, $P(x)$ s'écrit sous la forme :
  $P(x) = a[A^2 - B^2]$. On peut alors factoriser sous la forme : $P(x) = a(A-B)(A+B)$.
  Autrement dit, après identification de A et B et réécriture :
  $$P(x) = a\left(x+\frac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$
  Ce qui fait que P a deux racines,
  $$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$
  On peut alors déterminer le signe de P (laissé en exercice) :
  P est du signe de a à l'extérieur des racines, du signe opposé de a entre les deux racines.

Récapitulatif : racines et signe de ax^2+bx+c ($a \neq 0$). Soit $\Delta = b^2 - 4ac$.

signe de Δ	racines	signe de la fonction
$\Delta < 0$	$\emptyset$	signe de a
$\Delta = 0$	$\left\{-\dfrac{b}{2a}\right\}$	signe de a
$\Delta > 0$	$\left\{\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}; \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right\}$	signe de a à l'extérieur des racines signe de $-a$ entre les racines

Remarque On remarque que la fonction est **généralement** du signe de a, sauf entre les racines lorsqu'il y en a deux, où elle est du signe contraire.

Propriété L'expression factorisée d'un trinôme du second degré qui a deux racines x_1 et x_2 est $a(x-x_1)(x-x_2)$.
Dans le cas où il y a une seule racine x_0 (double), la factorisation est $a(x-x_0)^2$.
On ne sait pas, en première, factoriser dans le cas où il n'y a pas de racine.

Exemple Exercice 10p16, fonctions E et G.

▶ **Exercices :** terminer le 10p16, 72, 73p19 (factorisation)

Exemple Exercice 12p16, fonctions f et g.

▶ **Exercices :** terminer le 12p16, 13p16 et 85, 88p20 (signe)

Exemple Exercice 7p16, questions a,b et c.

▶ **Exercices :** terminer le 7p16, 25, 27p17 (résolutions)

▶ **Exercices :** 37, 38, 39p18 et 75, 77p19 (vision différente)

▶ **Exercice :** (algorithmique) 44p18

▶ **Exercices :** 52, 54, 58p18 (problèmes)

▶ **Exercices :** 104, 106, 109p21 (représentation, position relative)

▶ **Exercices :** 111, 112p22 (avec un graphique)

★ **Approfondissement :** (en DM éventuellement) 123p23, 137,139,142,147p26