Chapitre :
Vecteurs

∽

I. Géométrie plane

1. Rappels

⊛ **Activité :** 1p140

Définition Soit A et B deux points distincts du plan. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est caractérisé par :
- sa **direction**, celle de la droite (AB) ;
- son **sens**, celui de A vers B ;
- sa **norme** (ou longueur), qui est la longueur AB du segment $[AB]$. On note $\|\overrightarrow{AB}\|$.

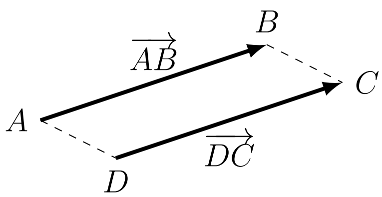
Le point A est l'**origine** du vecteur $\overrightarrow{AB}$, B est son **extrémité**.

On note $\overrightarrow{0}$ le **vecteur nul**, autrement dit le vecteur dont l'origine et l'extrémité coïncident.
Un vecteur peut être nommé par une simple lettre minuscule comme $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$, ...
Pour tout point O du plan et pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$, il existe un unique point A tel que $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{u}$.

Remarque Un vecteur peut être représenté à plusieurs endroits, contrairement à un point.

Propriété Soit A, B, C et D quatre points du plan. Alors :

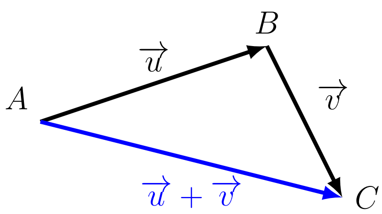
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \text{ si et seulement si } ABCD \text{ est un parallélogramme}$$



Définition La somme de deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est un vecteur $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$, de sorte que si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{BC}$, alors

$$\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

On appelle cette égalité la **relation de Chasles**.



Les propriétés et définitions de la page 142, déjà vues en seconde, sont à connaître, ainsi que la formule de la norme d'un vecteur :

Propriété Dans le plan muni d'un repère, soit $\overrightarrow{u}(x;y)$ un vecteur. Soit A et B deux points du plan tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$. Alors :

$$\|\overrightarrow{u}\| = AB = \sqrt{x^2 + y^2}$$

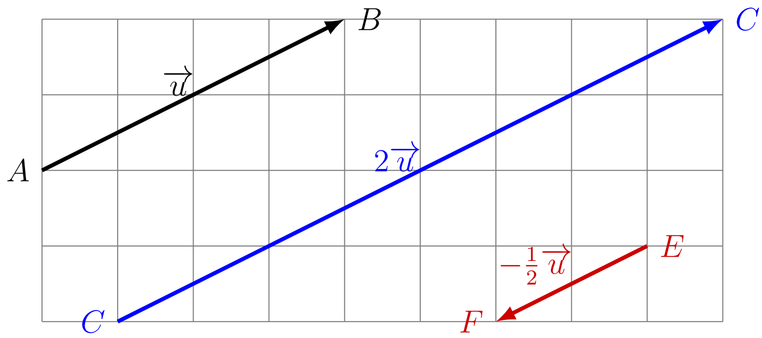
▶ **Exercices :** 4,6,7p148

▶ **Exercices :** 19,21,22,26,30p149

2. Colinéarité

⊛ **Activité :** 2p140

Définition Deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ qui ont la même direction sont dits **colinéaires**.
Dire que deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires revient à dire qu'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{v}$
Le vecteur nul $\overrightarrow{0}$ est considéré colinéaire à tout autre vecteur ($k = 0$).



Méthode Pour démontrer que trois points A, B et C sont alignés, il suffit de chercher à démontrer par exemple que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Propriété Dans un plan muni d'un repère, on considère deux vecteurs $\overrightarrow{u}(x;y)$ et $\overrightarrow{v}(x';y')$. Alors :

$$\overrightarrow{u} \text{ et } \overrightarrow{v} \text{ sont colinéaires si et seulement si } xy' - x'y = 0$$

Démonstration : Si $\overrightarrow{u}$ ou $\overrightarrow{v}$ est nul, alors c'est vrai. Sinon, $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires si et seulement si les coordonnées de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont proportionnelles. Autrement dit, (par un produit en croix) $xy' = x'y$, soit $xy' - x'y = 0$.

▶ **Exercices :** 65,67,68,69,71p151

▶ **Exercices :** 66p151, 77p151 (algorithmes)

▶ **Exercices :** 79,83,89p152

3. Équation cartésienne d'une droite

⊛ **Activité :** 4p141

Définition (Rappel) On appelle **vecteur directeur** d'une droite (d) tout vecteur non nul ayant la même direction que (d).

Ainsi, quels que soient les points distincts A et B de (d), $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de (d).

▶ **Exercices :** 109,110p154 (vecteur directeur)

Propriété **(Rappel)** Soit (d) une droite du plan muni d'un repère.

1. Si (d) n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées, elle a une équation de la forme $y = mx + p$. La constante m est le coefficient directeur et p est l'ordonnée à l'origine de la droite.
2. Si (d) est parallèle à l'axe des ordonnées, elle a une équation de la forme $x = k$.
3. Réciproquement, des équations de la forme $y = mx + p$ ou $x = k$ sont celles de droites.

On peut rassembler ces deux types d'équation en une seule :

Propriété Toute droite a une équation dite **cartésienne** de la forme :

$$ax + by + c = 0$$

Réciproquement, si a, b et c sont des constantes avec a ou b non nul, alors l'équation $ax + by + c = 0$ est celle d'une droite.

Démonstration : Il suffit de voir que les deux équations déjà connues peuvent s'écrire sous la forme $ax + by + c = 0$. Pour la réciproque :

- Si $b \neq 0$, on obtient $y = -\dfrac{a}{b}x - \dfrac{c}{b}$ qui est l'équation d'une droite ;
- Si $b = 0$, on obtient $x = -c$ qui est aussi l'équation d'une droite.

Propriété

- Soit (d) une droite d'équation $ax + by + c = 0$. Alors $\overrightarrow{u}(-b; a)$ est un vecteur directeur de (d).
- Soit (d) et (d') d'équation respective $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$. Alors (d) et (d') sont parallèles si et seulement si a et b sont proportionnels à a' et b' (i.e. $ab' - a'b = 0$).

Démonstration :

- Soit $A(x_0; y_0)$ un point de (d).
  On peut démontrer que $B(x_0 - b; y_0 + a)$ appartient aussi à (d). Or, $\overrightarrow{AB}(-b; a)$...
- (d) et (d') sont parallèles si et seulement si $\overrightarrow{u}(-b; a)$ et $\overrightarrow{u'}(-b'; a')$ sont colinéaires,
  i.e. $-ba' - a(-b') = 0 \Leftrightarrow ab' - a'b = 0$.

Exemple La droite $(d) : 2x - 3y + 7 = 0$ a pour vecteur directeur $\overrightarrow{u}(3; 2)$.
De plus, (d) est parallèle à $(d') : 4x - 6y - 2 = 0$ car $\dfrac{4}{2} = \dfrac{-6}{-3} = 2$.

▶ **Exercices :** 116,121p154 (lire 8p147) (équation à partir d'un point et d'un vecteur)

▶ **Exercices :** 124,127p154 (équation à partir de deux points)

▶ **Exercices :** 129,130,131p154 (vérification)

▶ **Exercices :** 134,135p154 (représentation)

▶ **Exercices :** 138,140p154 (parallèle à une droite passant par un point)

▶ **Exercices :** 142,143,147p155 (déterminer un vecteur directeur)

▶ **Exercices :** 148,149p155 (parallélisme)

▶ **Exercices :** 156p155

4. Décomposition de vecteurs

⊛ **Activité :** 3p141

Propriété Soit $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ deux vecteurs non colinéaires. Tout vecteur $\overrightarrow{u}$ peut s'exprimer de façon unique en fonction des vecteurs $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$, c'est à dire qu'il existe un unique couple de réels $(x;y)$ tel que $\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$

Démonstration : On note $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OA}$, on représente $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ d'origine O. On écrit $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$ avec $\overrightarrow{OP}$ et $\overrightarrow{i}$ colinéaires, de même que $\overrightarrow{OQ}$ et $\overrightarrow{j}$.

Remarque Les nombres x et y sont les coordonnées de $\overrightarrow{u}$ (ou de A) dans le repère $(O;\overrightarrow{i};\overrightarrow{j})$.

▶ **Exercices :** 89,90,91,93p152

▶ **Exercices :** 97p153 (logique), 99p153 (coordonnées ou vecteurs)