Chapitre :
Trigonométrie

∽

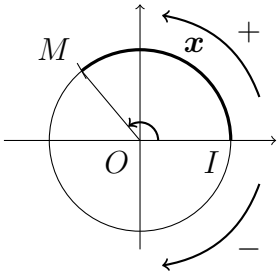
⊛ **Activité :** QCM page 164 (angles en degré)

⊛ **Activité :** 1p166 (enroulement de la droite réelle sur le cercle trigonométrique)

⊛ **Activité :** 2p166 (définition du radian)

I. Cercle trigonométrique

On munit le plan d'un repère orthonormé $(O; I; J)$. On définit le cercle trigonométrique comme le cercle de centre O et de rayon 1 (autrement dit de rayon OI) que l'on oriente positivement (c'est à dire dans sens opposé des aiguilles d'une montre).
On « enroule » la droite des réels à partir du point I.
À tout réel x on associe alors un point M du cercle trigonométrie. Tout point M est associé à une infinité de réels : si M est associé à x, alors il est aussi associé à $x + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.



► **Exercices :** 22,25p175

Définition Soit α un angle, dont un des côtés est la demi-droite $[OI)$. Il intersecte le cercle trigonométrique en un point M. Autrement dit $\alpha = \widehat{IOM}$.
On définit alors une mesure en radians de α comme étant tout réel x associé au point M.
Comme indiqué plus haut, on peut donc dire qu'une mesure en radians est définit à un multiple de 2π près.

À tout angle de mesure en degrés d comprise entre 0 et 180° on associe une unique mesure en radian α comprise entre 0 et π. La mesure en degré et celle en radian sont dans ce cas proportionnelles.
On a :

$$\frac{180}{d} = \frac{\pi}{\alpha}$$

Angles à connaître :

Mesure en degrés	0°	30°	45°	60°	90°	180°
Mesure en radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π

Remarque Une mesure en radians peut tout à fait être négative.
Par exemple, l'angle de mesure $\frac{7\pi}{4}$ a également une mesure de $-\frac{\pi}{4}$ (voir une figure).
Cette remarque nous amènera à définir un autre type d'angles (voir la section suivante), qui remplacera en généralisant la notion d'angle « géométrique » (toujours positif) utilisé jusque là.

▶ **Exercices :** 52p176 ; 54,55,58,59p177

Définition Tout angle a une unique mesure en radian comprise dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$. On appelle cette mesure la **mesure principale** de l'angle.

Exemple Détermination de mesure principale des angles $\frac{43\pi}{4}$ et $\frac{45\pi}{4}$.

▶ **Exercices :** 63,64p177

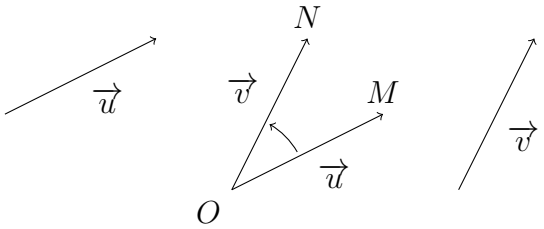
II. Angles orientés

1. Définitions

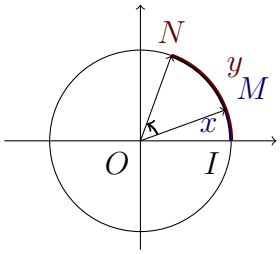
On considère deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls.

Définition Le couple $(\vec{u};\vec{v})$ est appelé **angle orienté** de vecteurs.

Définition Soit M et N les points tels que $\vec{u}=\overrightarrow{OM}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{ON}$.
Une **mesure en radian** de l'angle orienté $(\vec{u};\vec{v})$ est une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{OM};\overrightarrow{ON})$.



Propriété Soit M et N deux points du cercle trigonométrique, images respectives de x et y.
Une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OM};\overrightarrow{ON})$ est le nombre $y-x$.



Remarque Un angle orienté peut être négatif. Il ne faut pas confondre l'angle orienté avec l'angle géométrique, dont la mesure est la valeur absolue la mesure principale de l'angle orienté.

▶ **Exercices :** 73,74p178

2. Propriétés

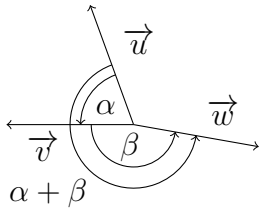
Propriété Deux angles orientés θ et θ' sont égaux si et seulement si il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que

$$\theta' = \theta + 2k\pi$$

Remarque Cela signifie que $\theta' - \theta$ est un multiple de 2π.
Cela revient aussi à dire que leurs mesures principales sont égales.

Propriété **(Relation de Chasles)** Pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ non nuls,

$$(\overrightarrow{u};\overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}) + (\overrightarrow{v};\overrightarrow{w})$$



Conséquences :

$$(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}) = -(\overrightarrow{v};\overrightarrow{u})$$
$$(-\overrightarrow{u};-\overrightarrow{v}) = (\overrightarrow{u};\overrightarrow{v})$$
$$(\overrightarrow{u};-\overrightarrow{v}) = (\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}) + \pi$$
$$(-\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}) = (\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}) + \pi$$

Propriété Soit k un réel **positif** et $(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v})$ un angle orienté. Alors $(k\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}) = (\overrightarrow{u};\overrightarrow{v})$

▶ **Exercices :** 80,81p178

Propriété Soit deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. Ces deux vecteurs sont colinéaires et de même sens si $(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}) = 0$.
Ces deux vecteurs sont colinéaires de sens contraire si $(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}) = \pi$.

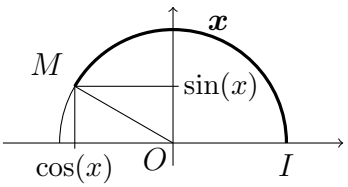
▶ **Exercices :** 76,82p178

III. Cosinus et sinus

On considère le cercle trigonométrique dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ orthonormé direct (c'est à dire $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}) = \dfrac{\pi}{2}$).

Définition Soit α l'image d'un point M sur le cercle trigonométrique. On définit alors :

- le cosinus de α, noté $\cos(\alpha)$, l'abscisse de M.
- le sinus de α, noté $\sin(\alpha)$, l'ordonnée de M.



La définition est cohérente avec celle donnée pour les angles aigus dans un triangle rectangle. Elle la généralise pour des angles quelconques.

Propriété Le signe du cosinus et du sinus dépend du quart de cercle où se trouve l'image de l'angle :

- Sur $[0;\pi/2]$, le cosinus et le sinus sont positifs ;
- Sur $[\pi/2;\pi]$, le sinus est positif et le cosinus est négatif ;
- Sur $[-\pi;-\pi/2]$, le sinus et le cosinus sont négatifs ;
- Sur $[-\pi/2;0]$, le cosinus est positif et le sinus est négatif.

Le cercle trigonométrique étant de rayon 1, on a pour conséquence (essentielle) : $-1 \leq \cos(\alpha) \leq 1$ et $-1 \leq \sin(\alpha) \leq 1$.
D'autre part, en considérant le triangle rectangle ayant ses côtés de longueur 1, x et y, on obtient d'après le théorème de Pythagore cette égalité importante (figure !) :

$$\cos(\alpha)^2 + \sin(\alpha)^2 = 1$$

Les angles orientés étant définis à $2k\pi$ près ($k \in \mathbb{Z}$),
on a, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\cos(\alpha + 2k\pi) = \cos(\alpha)$ et $\sin(\alpha + 2k\pi) = \cos(\alpha)$.
Valeurs usuelles :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

▶ **Exercices :** 32,34p169 , 37,38p176

Remarque Connaître uniquement le cosinus (resp. le sinus) d'un angle ne permet pas de déterminer celui-ci ; il faut en plus connaître dans quel « quart de cercle » (ou demi-cercle) se situe l'angle. Il y a en effets deux angles possibles pour un cosinus (ou un sinus) donné.

▶ **Exercice :** 36p176

Propriété Formules pour trouver la valeurs de cosinus et de sinus d'angles associés :

$$\cos(-x) = \cos(x) \qquad \sin(-x) = -\sin(x)$$

$$\cos(\pi - x) = -\cos(x) \qquad \sin(\pi - x) = \sin(x) \quad ; \quad \cos(\pi + x) = -\cos(x) \qquad \sin(\pi + x) = -\sin(x)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x) \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x) \quad ; \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x) \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x)$$

Ces propriétés proviennent d'observations géométriques à l'aide de symétries (voir page 172)

▶ **Exercice :** 97p179 (placement, calculs)

▶ **Exercices :** 89,90,91,92,93,96 p179 (simplification)

▶ **Exercices :** 104,105,106,112,113,,114,115p180 (équations)

★ **Approfondissement :** 148p185