Chapitre :
Variables aléatoires

∽

⊛ **Activité :** 1 page 268

I. Définitions

Définition Soit E l'ensemble des issues d'une expérience aléatoire. On définit une variable aléatoire X sur E quand on associe un (unique) réel à chaque issue de E.
L'ensemble des réels associés est dit ensemble des valeurs prises par X.

Exemple Un dé à 6 faces est lancé. On gagne 0,50€ si l'on obtient entre 2 et 5, on gagne 2€ si l'on obtient 6 et on perd 6€ si l'on obtient 1. On note X la valeur (algébrique) en euro du gain obtenu.

Issue	1	2	3	4	5	6
Valeur de X	-6	0,5	0,5	0,5	0,5	2

Remarque Un même réel peut être obtenu avec plusieurs issues, mais à chaque issue est associée un unique réel.

Les variables aléatoires permettent de définir des événements :

Définition Soit $\{x_1,x_2,\ldots,x_r\}$ l'ensemble des valeurs prises par une variable aléatoire X.
- On note « $X = x_i$ » l'ensemble des issues de E associées à la valeur x_i.
- On note « $X \geq x_i$ » l'ensemble des issues de E associées à une valeur au moins égale à x_i.

▶ **Exercices :** 13,14p277
Puisque « $X = x_i$ » est un événement, on peut en calculer la probabilité notée $P(X = x_i)$
(si l'ensemble E est muni d'une loi de probabilité P).

Définition Soit X une variable aléatoire. On appelle loi de probabilité de X la donnée de la probabilité $P(X = x_i)$ pour toutes les valeurs x_i prises par X.

Elle est souvent représentée sous forme de tableau.

Exemple Tableau de la loi de probabilités de l'exemple ci-dessus (dans le cas où le dé est équilibré : la loi est alors équirépartie sur les issues).

x_i	-6	0,5	2
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{1}{6}$

Remarque Les événements « $X = x_i$ » sont disjoints d'après la remarque précédente, et l'ensemble de ces événements regroupe toutes les issues possibles de E. Ainsi :

Propriété On a l'égalité suivante : $\sum_{i=1}^{i=p} P(X = x_i) = P(X = x_1) + P(X = x_2) + \cdots + P(X = x_r) = 1$

Il s'agit donc bien d'une loi de probabilité.

▶ **Exercices :** 18,19,20p277

▶ **Exercices :** 23,24p278

II. Espérance et variance

Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs $x_1, \ldots x_r$. On note $p_i = P(X = x_i)$.
En répétant de très nombreuses fois l'expérience aléatoire, on s'aperçoit que la fréquence d'apparition de chaque valeur x_i s'approche de p_i. Pour calculer la moyenne des valeurs obtenues, on peut donc utiliser les valeurs p_i comme fréquence. On obtient ce que l'on appelle l'espérance de X, notée $E(X)$ et donnée donc par :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{r} x_i p_i = x_1 p_1 + \ldots x_r p_r$$

Par suite, on définit la variance de X notée $V(X)$ par :

$$V(X) = \sum_{i=1}^{r} (x_i - E(X))^2 p_i = \left(\sum_{i=1}^{r} x_i^2 p_i \right) - E(X)^2 = E(X^2) - E(X)^2$$

Et bien sûr l'écart-type définit par $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

▶ **Exercices :** 41,42,44,45p280

⊛ **Activité :** 4p269 (appliquer une fonction affine)

Propriété Soit a et b des réels. Alors :

$$E(aX + b) = aE(x) + b \qquad \text{et} \qquad V(aX) = a^2 V(X)$$

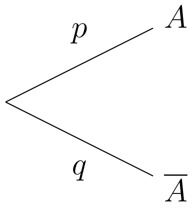
Démonstration : Voir celle du livre

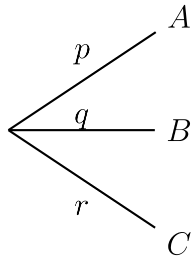
▶ **Exercices :** 51,52,46p281

▶ **Exercices :** DM (simulation par machine) : 28p278

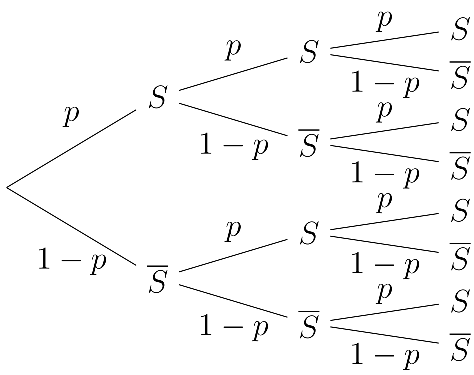
III. Répétition d'expérience ; arbre pondéré

⊛ **Activité :** 5p269
On peut modéliser une expérience aléatoire à l'aide d'une arbre pondéré. Les différentes issues de l'expérience sont représentées aux extrémités des branches. On écrit la probabilité de chaque issue au niveau de la branche correspondante.





La somme des probabilités des branches partant d'un même nœud vaut toujours 1.
Dans certains cas on répète une même expérience. On dit que la répétition se fait de manière indépendante si le résultat d'une expérience ne dépend pas du résultat des précédentes.
Dans ce cas, on peut représenter l'expérience par un arbre pondéré à plusieurs niveaux, chaque niveau donnant les issues de l'expérience. Les mêmes probabilités sont alors reportées sur les niveaux successifs de l'arbre.



Méthode

- Pour obtenir la probabilité d'une issue correspondant à une branche de l'arbre, on effectue le produit des probabilités le long de la branche.
- Pour obtenir la probabilité d'un événement correspondant à plusieurs branches de l'arbre, on ajoute les probabilités de toutes les branches correspondantes.

Exemple Exercice 59p282

▶ **Exercices :** 11,12p276

▶ **Exercices :** 60,61,63p282 et 65,66p283

IV. Schéma de Bernoulli

⊛ **Activité :** QCM page 292 (questions bleues) puis 1p294

Définition On appelle **épreuve de Bernoulli** une expérience aléatoire présentant deux issues, l'une S appelée succès et l'autre $\overline{S}$ appelée échec. On note p la probabilité du succès, puis $q = 1 - p$ la probabilité de l'échec.
La variable aléatoire X qui prend la valeur 1 en cas de succès et 0 en cas d'échec est appelée variable aléatoire de Bernoulli. La loi de probabilité, appelée loi de Bernoulli de paramètre p est donnée par :

x_i	0	1
$P(X = x_i)$	$1 - p$	p

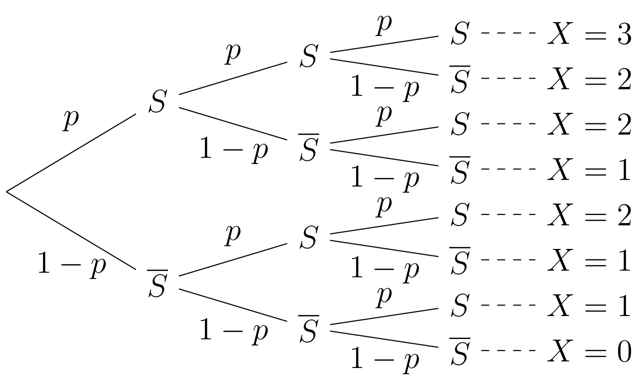
Propriété Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre p.
Alors :

$$E(X) = p \qquad V(X) = p(1-p) \quad \text{et} \quad \sigma(X) = \sqrt{p(1-p)}$$

Démonstration : Exercice.

Définition L'expérience aléatoire consistant à répéter n fois ($n \in \mathbb{N}^\star$) de manière indépendante une épreuve de Bernoulli de paramètre p s'appelle un **schéma de Bernoulli de paramètres n et p**.
On considère la variable aléatoire X égale au nombre de succès obtenus au cours des n épreuves. On appelle alors **loi binomiale de paramètres n et p** la loi de probabilité de X. On la note $\mathcal{B}(n,p)$.

Exemple Voici une eprésentation avec un arbre pondéré pour $n = 3$:



Il y a une rédaction à faire pour justifier qu'une variable aléatoire suite une loi binomiale.

Exemple Un QCM comporte cinq questions et, pour chaque question, quatre réponses sont proposées dont une seule est exacte. Un élève répond au hasard à ce QCM, ses réponses étant alors indépendantes. En particulier, pour chaque question, la probabilité que la réponse de l'élève soit exacte est $\frac{1}{4}$. On nomme X la variable aléatoire comptant le nombre de réponses exactes obtenues par cet élève. Quelle est la loi suivie par X ?
On considère l'**épreuve de Bernoulli** qui consiste pour l'élève à répondre à une question du QCM.
L'**événement succès** est le fait que la réponse soit exacte. La **probabilité de succès** est alors $p = \frac{1}{4}$.
L'expérience est répétée $n = 5$ fois **de manière indépendante** et on s'intéresse au **nombre X de succès**, on obtient donc un shéma de Bernoulli et X suit la loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = \frac{1}{4}$: $X \sim \mathscr{B}(5; 0{,}25)$.

▶ **Exercices :** 1,3,4p306

▶ **Exercices :** 15,17,18,19p307

▶ **Exercices :** 22,23,24,25p307

V. Coefficients binomiaux

⊛ **Activité :** 3pp294-295 (nombre de chemins sur un quadrillage)

Définition Soit n un entier naturel et k un entier compris entre 0 et n.
Le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ est le nombre de chemins réalisant k succès pour n répétitions sur l'arbre d'un schéma de Bernoulli.

Propriété

1. Pour tout entier k compris entre 0 et n, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
2. (Formule de Pascal) pour tout entier n non nul et tout entier k compris entre 0 et $n-1$,

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

Démonstration : Le nombre de chemins réalisant k échecs est le même que le nombre de chemins réalisant $n-k$ échecs (il suffit d'inverser les rôles du succès et de l'échec pour s'en convaincre), d'où la première formule.
Pour réaliser $k+1$ succès pour $n+1$ répétitions, il y a deux manières distinctes :

- Soit on a réalisé k succès pendant les n premières répétitions, et ensuite on obtient un échec, ce qui fait $\binom{n}{k}$ possibilités ;
- Soit on a réalisé $k+1$ succès pendant les n premières répétitions, et ensuite on obtient un succès, ce qui fait $\binom{n}{k+1}$ possibilités.

En ajoutant toutes les possibilités, on obtient bien la formule donnée.
Comment calculer les coefficients binomiaux ?
On peut utiliser la calculatrice (OPTN → PROB → nCr pour Casio ; MATH → PRB → Combinaison pour TI). Taper d'abord n, puis la commande, puis k.
On peut aussi utiliser le **Triangle de Pascal** pour les petites valeurs :

$k \rightarrow$	0	1	2	3	4
$n = 0$	1				
$n = 1$	1	1			
$n = 2$	1	2	1		
$n = 2$	1	3	3	1	
$n = 4$	1	4	6	4	1

On peut donc maintenant donner une écriture générale de la loi binomiale $\mathcal{B}(n;p)$.

Propriété Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n;p)$.
Alors, pour tout k compris entre 0 et n,

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Démonstration : C'est immédiat d'après ce que nous avons vu précédemment.

Propriété L'espérance mathématique d'une variable X qui suit la loi $\mathcal{B}(n;p)$ est np.
Sa variance est $np(p-1)$

Démonstration : Admis.
Les calculatrices peuvent permettre de donner les valeurs (y compris de la fréquence cumulée). Voir le livre page 300.

▶ **Exercices :** 28,31,32p308 (calculs)

▶ **Exercices :** 37,38p308 (loi binomiale abstraite)

▶ **Exercices :** 50,51p310 (probabilité maximale, espérance et variance)

▶ **Exercices :** 41,46p309 (loi binomiale concrète)