IV. Suites remarquables

1. Suites arithmétiques

Définition Soit n_0 un entier naturel, r un réel et $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite.
Si, quelque soit $n \geq n_0$, $u_{n+1} - u_n = r$, on dit que u est une suite arithmétique de raison r.

Remarque Cette définition donne une relation de récurrence pour la suite arithmétique :

$$u_{n+1} =$$

Exemple La suite u définie par $u_n = 5n+3$ pour tout $n \geq 0$ est arithémtique de raison 5. En effet, $u_{n+1} - u_n = 5(n+1)+3-(5n+3) = 5n+5+3-5n-3 = 5$.

Plus généralement :
Toute suite de la forme $u_n = r \times n + a$, avec r et a des nombres réels, est arithmétique de raison r.
La réciproque est vraie :

Théorème Soit r un nombre réel et soit u une suite arithmétique de raison r, définie pour $n \geq 0$.
Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n =$$

Plus généralement, pour tout $p \in \mathbb{N}$ et $n \geq p$, $u_n = u_p + r \times (n-p)$.
Cette dernière égalité est utile en particulier pour les suites dont le permier terme n'est pas u_0.

Remarque Ce théorème donne une définition explicite des suites arithmétiques.

Propriété Les variations d'une suite arithmétique dépendent de sa raison r :

1. Si $r < 0$, alors la suite est décroissante ;
2. Si $r = 0$, alors la suite est constante ;
3. Si $r > 0$, alors la suite est croissante.

Démonstration : Évident d'après la définition.

Propriété Soit u une suite arithmétique de raison r définie pour $n \geq 0$.
Pour tout $n \geq 0$, on définit $S_n = u_0 + \cdots + u_n$. Alors

$$S_n = (n+1)\left(\frac{u_0+u_n}{2}\right)$$

Démonstration : $S_n = u_0+u_1+\cdots+u_n = u_0+(r+u_0)+\cdots+(nr+u_0) = (n+1)u_0+r(1+\cdots+n)$.
Or, $1+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ car $(1+\cdots+n)+(n+\cdots+1) = n(n+1)$.
Donc $S_n = (n+1)u_0+r\dfrac{n(n+1)}{2} = \dfrac{(n+1)2u_0}{2}+r\dfrac{n(n+1)}{2} = \dfrac{n+1}{2}(2u_0+nr) = \dfrac{n+1}{2}(u_0+nr+u_0)$.
Comme $u_n = nr+u_0$, on trouve bien le résultat souhaité.

▶ **Exercices :** 70,71,75,77p124

▶ **Exercices :** 85,86,87p125 (avec sommes)

2. Suites géométriques

Définition Soit n_0 un entier naturel, q un nombre réel et $(v_n)_{n\geq n_0}$ une suite. Si quel que soit $n \geq n_0$, $\frac{v_{n+1}}{v_n} = q$, on dit que v est une suite géométrique de raison q.

Remarque Cette définition donne une relation de récurrence pour la suite géométrique :

$$v_{n+1} =$$

Exemple Soit $v_n = 2 \times 3^n$ $(n \geq 0)$. Alors v est une suite géométrique de raison 3. En effet, $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{2 \times 3^{n+1}}{2 \times 3^n} = 3$.

De manière générale, toute suite de la forme $v_n = b \times q^n$ (b et q réels) est une suite géométrique de raison q. La réciproque est vraie :

Théorème Soit q un réel non nul et v une suite géométrique de raison q. Alors quelque soit $n \geq 0$,

$$v_n =$$

Plus généralement, pour tout $p \in \mathbb{N}$ et $n \geq p$, $v_n = v_p \times q^{n-p}$.

Propriété Les variations d'une suite géométrique v dépendent de sa raison q :

- Si $q > 1$, alors v est croissante si $v_0 > 0$, décroissante sinon.
- Si $0 < q < 1$, alors v est décroissante si $v_0 > 0$, croissante sinon.

Démonstration : On étudie le signe de $v_{n+1} - v_n = v_0 q^{n+1} - v_0 q^n = v_0 q^n (q-1)$.
Dans tous les cas, $q > 0$. le signe de $v_{n+1} - v_n$, ne dépend alors que du signe de v_0 et de $q - 1$. Il y a donc quatre cas possibles, qui donnent les variations affirmées par la propriété.

Propriété Soit v une suite géométrique de raison q définie pour $n \geq 0$. Soit, pour tout $n \geq 0$, $S_n = v_0 + \cdots + v_n$. Alors, si $q = 1$, $S_n = (n+1)v_0$ et si $q \neq 1$,

$$S_n = v_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Démonstration : Si $q = 1$, alors $S_n = v_0 + \cdots + v_0 \times q^n = v_0 + \cdots + v_0 \times 1^n = v_0 + \cdots + v_0 = (n+1)v_0$.
Si $q \neq 1$, $S_n = v_0 + v_0 \times q + \cdots + v_0 \times q^n = v_0 \times (1 + q + \cdots + q^n)$.
Or, $(1 + q + \cdots + q^n) - q(1 + q + \cdots + q^n) = 1 - q^{n+1}$, donc $(1 + q + \cdots + q^n) = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.
D'où le résultat.

► **Exercices :** 91,94,96,100p126

► **Exercices :** 102,104p126 (sommes)

► **Exercice :** 109p126