Devoir surveillé n°2 – mathématiques
Correction

Exercice 1

1. $(uv)' = u'v + uv'$
2. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$
3. Lorsque $\Delta < 0$, alors $ax^2 + bx + c$ est du signe de a.

Exercice 2

On résout l'inéquation :

$$\begin{aligned}\frac{5}{3} - 2x > 0 &\Leftrightarrow \frac{5}{3} > 2x \\ &\Leftrightarrow \frac{5}{3} \times \frac{1}{2} > x \\ &\Leftrightarrow \frac{5}{30} > x\end{aligned}$$

On en déduit le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		$\frac{5}{30}$		$+\infty$
signe de $\frac{3}{5} - 2x$		$+$	0	$-$	

Exercice 3

1. On a : $f(x) = 2x^2 - 30x + 200 + 50 \times \dfrac{1}{x}$. Alors $f'(x) = 4x - 30 + 50 \times \left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$.

   En mettant au même dénominateur : $f'(x) = \dfrac{x^2(4x - 30) - 50}{x^2} = \dfrac{4x^3 - 30x^2 - 50}{x^2}$.

2. (a) On a $g'(x) = 12x^2 - 60x = x(12x - 60) = 12x(x - 5)$.

   (b) Il y a deux manière différentes d'étudier le signe de $g'(x)$. Il s'agit d'une fonction polynomiale de degré 2. Donc on peut calculer $\Delta = b^2 - 4ac = (-60)^2 - 4 \times 12 \times 0 = 60^2 > 0$. Il y a donc deux racines : $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{60 - 60}{2 \times 12} = 0$ et $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{60 + 60}{2 \times 12} = 5$.
   Par suite, $a = 12 > 0$, donc on a :

x	$-\infty$		0		5		$+\infty$
signe de $12x^2 - 60x$		$+$	0	$-$	0	$+$	

   L'autre méthode consiste à considérer g comme un produit de fonctions affines.
   On étudie alors le signe de chacune de ces fonctions :
   - $12x > 0 \Leftrightarrow x > 0$;
   - $x - 5 > 0 \Leftrightarrow x > 5$.

   Ainsi, quelque soit la méthode, on a le tableau suivant :

x	$-\infty$		0		5		$+\infty$
signe de $12x$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $x - 5$		$-$		$-$	0	$+$	
signe de $12x^2 - 60x$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi, sur $[1;10]$:

x	1		5		10
signe de $g'(x) = 12x^2 - 60x$		$-$	0	$+$	

(c) On en déduit le tableau suivant :

x	1		5		10
signe de $g'(x)$		$-$	0	$+$	
variations de g	-76	$\searrow$	-300	$\nearrow$	950

(d) On observe d'après le tableau précédent que g est strictement décroissante et négative sur $[1;5]$, donc l'équation $g(x) = 0$ n'a pas de solution sur $[1;5]$.

Sur l'intervalle $[5;10]$, avec $k = 0$:

- f est continue car dérivable ;
- $f(5) = -300 < 0$ et $f(10) = 950 > 0$, donc $f(5) < k < f(10)$;
- f est strictement croissante.

Alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur $[5;10]$ (et par suite sur $[1;10]$).

(e) D'après la calculatrice, la solution α a pour valeur approchée $\alpha \simeq 7{,}7103$.

Ainsi, l'encadrement demandé est $7{,}71 < \alpha < 7{,}72$.

(f) D'après les variations et la solution de l'équation $g(x) = 0$, on obtient :

x	1		α		10
signe de $g(x)$		$-$	0	$+$	

3. Le signe de $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$ est celui de $g(x)$ puisque $x^2 > 0$.

Ainsi on obtient le tableau de variations suivant :

x	1		α		10
signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
variations de f	222	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	105

D'après la calculatrice, $f(\alpha) \simeq 94{,}07$.

4. Puisque, d'après le tableau de variations précédent, le minimum de f est environ 94,07 donc inférieur à 95, on en déduit que le coût moyen minimum est bien inférieur à 95 000 euros.