# Chapitre :
# Suites

∽

⊛ **Activité :** 1 et 2 page 19 (calculs de termes de suites)

# I. Suites géométriques

## 1. Rappels

**Définition** Une suite $u$ est géométrique s'il existe un nombre réel $q$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = q \times u_n$$

Le nombre $q$ est appelé **raison** de la suite $u$.

**Propriété** Une suite $u$ est géométrique de raison $q$ si et seulement si pour tout $n \geqslant 0$ on a :

$$u_n = q^n u_0$$

Plus généralement, si le premier terme est de rang $p$, alors pour tout $n \geqslant p$,

$$u_n = q^{n-p} u_p$$

**Méthode** Pour démontrer qu'une suite est géométrique, il y a donc trois possibilités :
- On montre directement que le terme général s'écrit sous la forme $u_n = q^n u_0$ (ou $u_n = q^{n-p} u_p$) ;
- On montre directement que la suite vérifie une relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = q \times u_n$ ;
- Si les deux cas précédents ne sont pas évidents, on exprime le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ et on démontre que l'expression est constante (ne dépend pas de $n$). Cette constante est alors la raison $q$ de la suite $u$.

▶ **Exercices :** 1,2p26, 35,36,37,39p35

**Méthode** Pour démontrer qu'une suite **n'est pas** géométrique, on montre deux quotients de termes successifs qui n'ont pas la même valeur.

⚠ Si on trouve deux quotients sont égaux, cela ne démontre pas que la suite est géométrique. Il faut faire un calcul général avec $n$ quelconque (voir la méthode précédente).

▶ **Exercices :** 41,42,45,46p35

**Propriété** **(Variations)** Soit $q$ une suite géométrique de raison $q$ et de premier terme $u_0$ **strictement positif**.
- Si $q > 1$, alors $u$ est strictement croissante ;
- Si $0 < q < 1$, alors $u$ est strictement décroissante.

**Démonstration :** Pour déterminer les variations de la suite, on doit étudier le signe de $u_{n+1}-u_n$. Or, étant donné que la suite est géométrique de raison $q$, $u_{n+1}-u_n = qu_n - u_n = (q-1)u_n = (q-1)q^n u_0$. Comme $u_0 > 0$ et $q > 0$ dans tous les cas de l'énoncé, $q^n u_0$ est positif et le signe de $u_{n+1} - u_n$ est donc celui de $q-1$.

- Si $q > 1$, alors $q - 1 > 0$, donc $u_{n+1} - u_n > 0$ et $u$ est strictement croissante ;
- Si $0 < q < 1$, alors $q - 1 < 0$, donc $u_{n+1} - u_n < 0$ et $u$ est strictement décroissante.

**Exemple** $u_n = \dfrac{1}{2} \times 2^n$ et $v_n = 4 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.
Calculer les trois premiers termes, déterminer les variations.

▶ **Exercices :** 51,52,53,54p35

★ **Approfondissement :** 57,58,60p36

▶ **Exercices :** (algorithmes) 61 à 65p37

# 2. Somme de termes

⊛ **Activité :** page 20

**Propriété** Soit $q$ un nombre différent de 1 et $n$ un nombre entier naturel. Alors :

$$1 + q + q^2 \cdots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

**Démonstration :** On pose $S = 1 + q + q^2 \cdots + q^n$. On exprime $qS$, puis on soustrait $S$.
On obtient $qS - S = q^{n+1} - 1$. Ainsi, puisque $q \neq 1$,

$$S = \frac{q^{n+1}-1}{q-1} = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

**Propriété** Soit $u$ une suite géométrique de raison $q \neq 1$. Alors, pour tout entier naturel $n$ :

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

De manière plus générale, pour tous entiers naturels $n$ et $p$ avec $n > p$,

$$u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n = u_p \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q} = (\text{premier terme}) \frac{1-q^{(\text{nombre de termes})}}{1-q}$$

**Exemple** Exercice 68p38

▶ **Exercices :** 69,70,71p38, 73,74,75p38

▶ **Exercices :** (algo) 79p38, 80,81p38-39

# 3. Limites

⊛ **Activité :** fiche 2018_1ES_Acti01_limites_suites

**Propriété** **(Limite de $q^n$)** Soit $q$ un nombre strictement positif.

- Si $q > 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$ ;

- Si $0 < q < 1$ alors $\lim_{n \to +\infty} q^n = 0$ ;
- Si $q = 1$ (cas rare), alors $\lim_{n \to +\infty} q^n = 1$.

**Exemple** 3p27

▶ **Exercices :** 4,5p27

**Remarque** Notons que l'on peut effectuer des opérations avec les limites (voir seulement le livre page 25)

▶ **Exercices :** 86,87,88p39

**Propriété** **(Limite d'une somme de termes)** Soit $u$ une suite géométrique positive de raison $q > 0$. On pose, pour tout entier naturel $n$, $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

- Si $q > 1$ alors $\lim_{n \to +\infty} S_n = +\infty$ ;
- Si $0 < q < 1$ alors $\lim_{n \to +\infty} S_n = u_0 \times \dfrac{1}{1-q}$.

▶ **Exercices :** 89,90,92p39

# II. Suites arithmético-géométriques

**Définition** Une suite $u$ est dite **arithmético-géométrique** s'il existe deux nombres $a$ et $b$ tels que pour tout entier naturel $n$,

$$u_{n+1} = au_n + b$$

Pour déterminer la forme explicite (puis éventuellement la limite) d'une telle suite, on passe généralement par l'utilisation d'une suite géométrique $v$ définie à partir de $u$.

**Exemple** Soit $u_{n+1} = 0{,}5u_n + 2{,}5$ et $u_0 = 1$. On pose $v_n = 5 - u_n$. On démontre que $v$ est géométrique de raison 0,5 et de premier terme 4. On a alors : $v_n = 4 \times 0{,}5^n = 5 - u_n$, soit $u_n = 5 - 4 \times 0{,}5^n$.

▶ **Exercice :** 11p30

▶ **Exercices :** 96p39, 97,98,99,100p40

★ **Approfondissement :** 104,105pp41-42