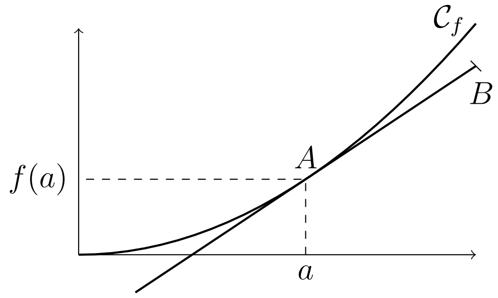
Chapitre :
Généralités sur les fonctions

I. Rappels sur la dérivation

Soit f une fonction dérivable. Le nombre dérivé $f'(a)$ est, graphiquement, le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a.



$f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente (AB) à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse a.

Rappel Soit A et B deux points d'une droite non verticale d'un repère, alors le coefficient directeur de la droite (AB) est donné par :

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Pour calculer la dérivé d'une fonction, on utilise les formules de dérivation.
Voir fiche de dérivation (valable en 1ES et 1S).

▶ **Exercice :** fiche d'exercices dérivation

Propriété La tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a a pour équation :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Propriété Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- Si $f'(x)$ est positive sur I, alors f est croissante sur I ;
- Si $f'(x)$ est négative sur I, alors f est décroissante sur I ;
- Si $f'(x)$ est nulle sur I, alors f est constante sur I.

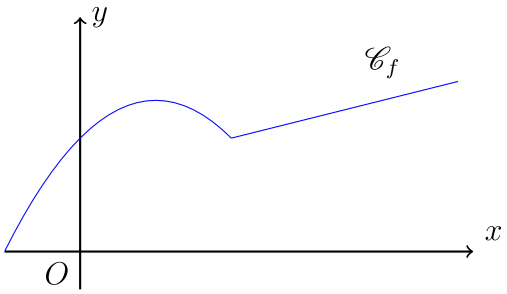
Étudier le signe de la dérivée f' permet donc d'en déduire les **variations de la fonction** f.
Voir la fiche méthode d'étude de signes.

▶ **Exercice :** fiche d'exercice sur les signes et variations

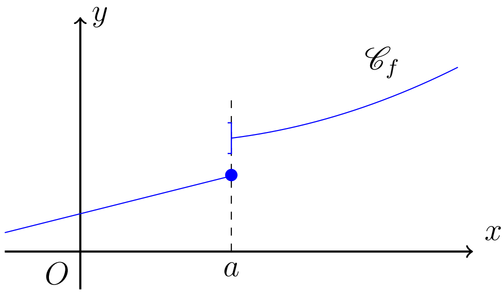
II. Continuité

⊛ **Activité :** page 52

Définition Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
On dit que f est continue sur I si la représentation graphique de f sur I se fait « sans lever le crayon », autrement dit s'il n'y a pas de « saut »



Fonction continue



Fonction non continue (en a)

▶ **Exercices :** 16,17p62

Propriété Toutes les fonctions de références vues jusqu'en terminale sont continues.

Propriété Soit f une fonction. Si f est dérivable sur I, alors f est continue sur I.

Théorème **(des valeurs intermédiaires)** Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a; b]$. Soit k un réel. Si les conditions suivantes sont remplies :

1. k compris entre $f(a)$ et $f(b)$;
2. f est continue sur $[a; b]$;

Alors l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution dans $[a; b]$.
Si de plus f est strictement monotone, alors il existe une unique solution.

▶ **Exercices :** 27,28,29,30,31p63 (par graphique, tableau, etc.)

▶ **Exercices :** 41,42,44p65

III. Convexité

⊛ **Activité :** Lire le livre page 125 :
différentes manières d'être croissante ; position par rapport aux tangentes.

Définition Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
On dit que f est convexe sur I si sa courbe représentative est entièrement située au dessus de chacune de ses tangentes sur I.
On dit que f est concave sur I si sa courbe représentative est entièrement située en dessous de chacune de ses tangentes sur I.

Propriété

- La fonction carré est convexe sur $\mathbb{R}$.
- La fonction racine carrée est concave sur $]0; +\infty[$.
- La fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$.
- La fonction logarithme est concave sur $]0; +\infty[$.

Voir pages 126 les représentations graphiques

▶ **Exercices :** page 132 (voir page 131 avant)

Remarque La courbe représentative de $-f$ est symétrique de celle de f par rapport à l'axe des abscisses.

Propriété Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.

- f est convexe sur I si et seulement si f' est croissante sur I.
- f est concave sur I si et seulement si f' est décroissante sur I.

Définition L'étude de la convexité d'une fonction est la recherche des intervalles sur lesquels la fonction est convexe, mais aussi des intervalles sur lesquels elle est concave.

Ainsi, pour étudier la convexité d'une fonction f, on doit étudier les variations de sa dérivée f'.
Pour cela, il suffit alors d'étudier le signe de sa dérivée seconde f'', dérivée de la dérivée f'.

▶ **Exercices :** activité 1p124

Propriété Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur un intervalle I.

- f est convexe sur I si et seulement si $f''(x) \geqslant 0$ sur I.
- f est concave sur I si et seulement si $f''(x) \leqslant 0$ sur I.

Définition (Points d'inflexion) Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. S'il existe un point A de la courbe $\mathcal{C}_f$ tel que la tangente à la courbe en A traverse la courbe en A, alors on dit que A est un point d'inflexion.
Un tel point correspond à un changement de convexité.

Exemple La fonction cube possède un point d'inflexion en $x = 0$ (voir une figure).

Propriété Soit f deux fois dérivable sur I. Si f' change de variation en un réel a de I, autrement dit si f'' change de signe en a, alors f admet un point d'inflexion au point d'abscisse a.

▶ **Exercices :** 8 à 11p134 ; 72,74,76,77,78,79p142 ; 85,86,87,90p142