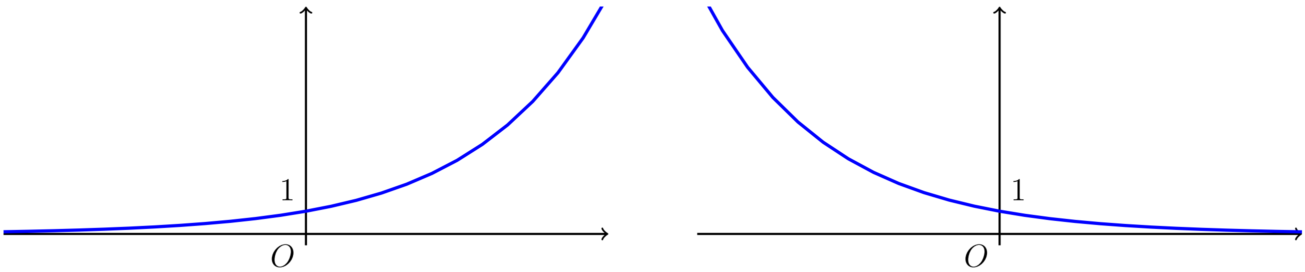
Chapitre :
Fonctions exponentielles

I. Fonction exponentielle de base q

⊛ **Activité :** fichier geogebra avec tableur : introduction par représentation de suite géométrique.

Définition Soit q un réel strictement positif. La fonction $x \mapsto q^x$ s'appelle fonction exponentielle de base q. Elle est définie, dérivable et **strictement positive** sur $\mathbb{R}$.

Ses variations dépendent de la valeur de q comme pour les suites géométriques.
Dans tous les cas, $q^0 = 1$.



$q > 1$ $\qquad$ $0 < q < 1$

On peut calculer des images de cette fonction avec la calculatrice avec la touche $\boxed{\wedge}$ ou $\boxed{x^y}$.
On admet la formule suivante, appelée **relation fonctionnelle** :

Propriété Pour tous réels x et y,

$$q^{x+y} = q^x \times q^y$$

Les propriétés déjà connues avec des entiers se prolongent donc pour des réels.
On dit que l'exponentielle transforme une somme en produit.

Par conséquent :

Propriété Soit x et y des réels, soit m un entier relatif. Alors :

$$q^{-x} = \frac{1}{q^x} \qquad q^{x-y} = \frac{q^x}{q^y} \qquad (q^x)^m = q^{mx}$$

Enfin, on a $q^{\frac{1}{2}} = \sqrt{q}$.

▶ **Exercices :** 1,2p79 (variations et représentation)

▶ **Exercices :** 6 à 13 page 81, 28 à 30 page 86 (relation fonctionnelle)

II. Fonction exponentielle de base e

⊛ **Activité :** fichier ggb montrant l'existence de la valeur de q pour laquelle le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse 0 de la courbe de la fonction exponentielle de base q vaut 1.

Propriété Il existe une seule valeur du réel q telle que la tangente au point $A(0;1)$ à la courbe représentative de la fonction $x \mapsto q^x$ a pour coefficient directeur 1. Cette valeur particulière du réel q est notée **e**. Le réel e est environ égal à 2,718 (mais n'a pas de valeur exacte sous forme décimal ou rationnelle).

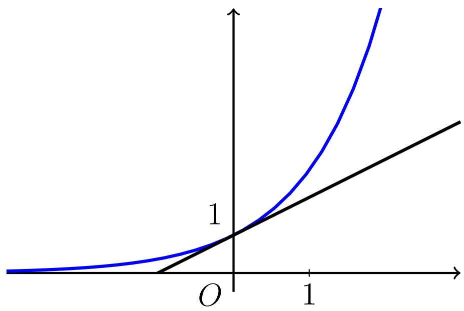
Définition La fonction $x \mapsto e^x$ est appelée fonction exponentielle de base e ou tout simplement exponentielle. On la note parfois exp.

Propriété On a les propriétés suivantes, conséquences de celles de la section précédente :
- $exp(x) = e^x$
- La fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ et admet 1 pour nombre dérivé en 0 ($exp'(0) = 1$).
- Quelque soit le réel x, $e^x > 0$.
- Quelque soient les réels x et y et l'entier relatif m,

$$e^{x+y} = e^x \times e^y \qquad e^{-x} = \frac{1}{e^x} \qquad e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y} \qquad (e^x)^m = e^{mx}$$

Propriété pour tout réel x, $exp'(x) = e^x$. Autrement dit, la fonction exponentielle est égale à sa fonction dérivée.

⚠ ce n'est valable que pour $x \mapsto e^x$!
En conséquence, puisque la dérivée est strictement positive (car l'exponentielle l'est), la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. La représentation graphique est alors ainsi :



▶ **Exercices :** 3,4,5p80 (étude de variations simples) et 59 à 67p88 (dérivation)

Propriété

1. Pour tout réel $x \leqslant 0$, $0 < e^x \leqslant 1$;
2. Pour tout réel $x \geqslant 0$, $e^x \geqslant 1$;
3. Pour tous réels x et y, $e^x = e^y \Leftrightarrow x = y$ et $e^x < e^y \Leftrightarrow x < y$.

▶ **Exercices :** 44 à 47 page 87 et 52 à 55 page 87 (équations et inéquations)

III. Exponentielle de u

Propriété Soit u une fonction dérivable. Alors la fonction $e^u : x \mapsto e^{u(x)}$ est dérivable, et

$$\left(e^u\right)'(x) = u'(x) \times e^{u(x)}$$

Exemple Soit à dériver $f : x \mapsto e^{3x^2+2x}$.

▶ **Exercices :**

Propriété Soit u une fonction dérivable. Alors les fonctions u et e^u ont le même sens de variation.

Démonstration : En effet, le signe de la dérivée de e^u est celui de u' (voir la formule plus haut).

Exemple Donner les variations de la fonction f définie plus haut.

▶ **Exercices :** 71 à 73 page 88 (dérivation et variations)

▶ **Exercices :** 78,79,80 page 89 (fonctions à paramètre)

★ **Approfondissement :** 88,89,90 page 91 (exercices de type bac)