Chapitre :
Logarithme

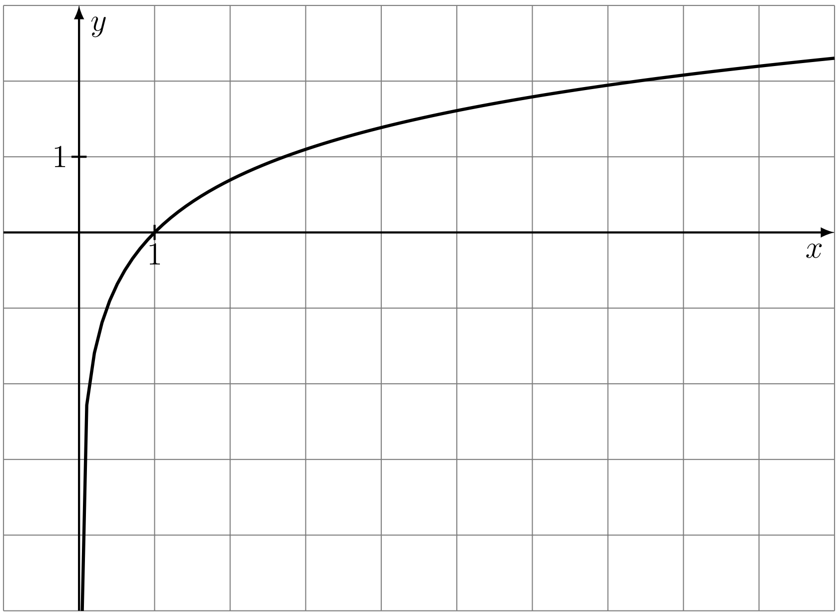
∽

⊛ **Activité :** page 100 (fonction réciproque de l'exponentielle et courbe symétrique)

Définition La fonction exponentielle étant continue, strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et prenant ses valeurs sur $]0;+\infty[$, quelque soit le réel positif k, l'équation $e^x = k$ admet une unique solution. On note cette solution $x = \ln k$, et on lit « logarithme de k ».
On définit alors la fonction logarithme (néperien) sur $]0;+\infty[$ par la relation :

$$\ln(x) = y \Leftrightarrow x = e^y$$

La courbe représentative est, de part sa définition, symétrique de celle de la fonction exponentielle par rapport à la droite d'équation $y = x$ (abscisses et ordonnées sont échangées).
On dit que les deux fonctions sont réciproques l'une de l'autre.



Propriété

- Quelque soit $x > 0$, $e^{\ln(x)} = x$.
- Quelque soit x réel, $\ln(e^x) = x$.
- $\ln(1) = 0$ et $\ln(e) = 1$

▶ **Exercices :** 25 à 28 p110

Remarque Comme, pour tout nombre réel $a > 0$, $a = \mathrm{e}^{\ln a}$, on peut résoudre des équations de la forme $\mathrm{e}^X = a$ en utilisant les propriétés de l'exponentielle.

⚠ lorsque $a < 0$, cette équation n'a pas de solution (puisqu'une exponentielle est strictement positive).

Exemple

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{2x} = 5 &\Leftrightarrow \mathrm{e}^{2x} = \mathrm{e}^{\ln 5} \\ &\Leftrightarrow 2x = \ln 5 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\ln 5}{2} \end{aligned}$$

▶ **Exercices :** 43 à 48 p 111

Propriété Soit a et b deux réels strictement positifs. Alors :
- $\ln(a) = \ln(b) \Leftrightarrow a = b$
- $\ln(a) < \ln(b) \Leftrightarrow a < b$

Méthode Pour résoudre une équation du type $\ln(X) \leqslant a$, deux points de vue :
- on considère que $a = \ln(e^a)$. Ainsi, $\ln(X) \leqslant \ln(\mathrm{e}^a)$ et par suite, $X \leqslant e^a$.
- on utilise le fait que l'exponentielle est strictement croissante :

$$\ln(X) \leqslant a \Leftrightarrow e^{\ln(X)} = e^a \Leftrightarrow X \leqslant e^a$$

La difficulté réside dans le fait de résoudre sur l'ensemble où $X > 0$.

Exemple (exercice 51p111) $\ln(1 + 3x) = \ln(x + 1)$ est définie si $1 + 3x > 0$ et si $x + 1 > 0$.
Autrement dit si $x > -\frac{1}{3}$ et si $x > -1$. L'ensemble de définition est donc $\left]-\frac{1}{3}; +\infty\right[$.
Par suite, dans cet ensemble de définition on a :

$$\begin{aligned} \ln(1 + 3x) = \ln(x + 1) &\Leftrightarrow 1 + 3x = x + 2 \\ &\Leftrightarrow 2x = 1 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

comme $\frac{1}{2}$ appartient à l'ensemble de définition, $x = \frac{1}{2}$ est solution de l'équation.

▶ **Exercices :** 20 à 22 p110 (ensembles de définition)

▶ **Exercices :** 52,53,55 p111 (équations)

▶ **Exercices :** 67 à 70 p 112 (inéquations)

Propriété **(Relation fonctionnelle)** Soit a et b deux réels strictement positifs. Alors :

$$\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$$

On dit que le logarithme transforme un produit en somme.

Exemple $\ln(12) = \ln(4 \times 3) = \ln(4) + \ln(3) = \ln(2 \times 2) + \ln(3) = \ln(2) + \ln(2) + \ln(3) = 2\ln(2) + \ln(3)$

La propriété précédente a les conséquences suivantes :

Propriété Soit a et b deux réels strictement positifs. Alors :
- $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$
- $\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln(b)$
- $\ln(a^n) = n \times \ln(a)$

- $\ln(\sqrt{a}) = \dfrac{1}{2}\ln(a)$

Ces propriétés permettent de réécrire des expressions.

▶ **Exercices :** 31 à 33 p110 (réécritures)

▶ **Exercices :** 56 à 59 p111 (équations)

Méthode Pour résoudre des équations de la forme $x^n = a$ (d'inconnue x), on applique le logarithme, on isole le logarithme de x, puis on applique l'exponentielle :

$$\begin{aligned} x^5 = 4 &\Leftrightarrow \ln(x^5) = \ln 4 \\ &\Leftrightarrow 5\ln x = \ln 4 \\ &\Leftrightarrow \ln x = \frac{\ln 4}{5} \\ &\Leftrightarrow x = \mathrm{e}^{\frac{\ln 4}{5}} \end{aligned}$$

▶ **Exercices :** 77, 79, 80 p112

Méthode Pour résoudre des inéquations de la forme $q^n < a$ (d'inconnue n), on applique le logarithme, puis, lorsque l'on divise, on fait attention au signe de $\ln q$:

$$\begin{aligned} 0{,}8^n < 0{,}1 &\Leftrightarrow \ln(0{,}8^n) < \ln 0{,}1 \\ &\Leftrightarrow n\ln 0{,}8 < \ln 0{,}1 \\ &\Leftrightarrow n > \frac{\ln 0{,}1}{\ln 0{,}8} && \text{car } \ln 0{,}8 < 0 \text{ car } 0{,}8 < 1 \end{aligned}$$

▶ **Exercices :** 86,87 p113

Propriété La fonction logarithme est dérivable sur $]0;+\infty[$ et :

$$\ln'(x) = \frac{1}{x}$$

Autrement dit la dérivée de la fonction logarithme est la fonction inverse.

Remarque Comme elle est dérivable, la fonction logarithme est continue. D'autre part, sa dérivée étant positive sur $]0;+\infty[$, on en déduit que la fonction logarithme est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

▶ **Exercices :** 88 à 91 p113

▶ **Exercices :** 92,93 p113 (avec paramètres)

★ **Approfondissement :** 99,100,101 p114 à 116