Chapitre :
Lois à densité

∽

⊛ **Activité :** 2p217

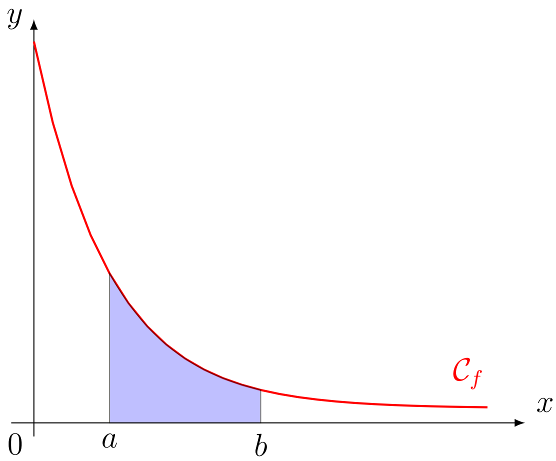
I. Variables continues

Définition Soit X une variable aléatoire. Si X prend comme valeurs tous les nombres d'un intervalle I de $\mathbb{R}$, on dit que X est **continue**.

Définition Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est appelée fonction **densité** si :
- f est positive sur $\mathbb{R}$: quelque soit x réel, $f(x) \geqslant 0$;
- f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de valeurs (il peut y avoir un nombre fini de sauts) ;
- L'aire située entre l'axe des abscisses et la courbe représentative de f dans un repère orthogonal est égale à 1 u.a. (la somme totale des probabilités vaut 1).

Définition Soit f une fonction de densité. On dit qu'une variable aléatoire X a pour densité la fonction f si, quelque soit a et b deux réels ($a < b$),

$$P(a \leqslant X \leqslant b) = \int_a^b f(t)dt$$



Remarque Soit k un réel quelconque et X une variable aléatoire continue. Alors $P(X = k) = 0$. Par conséquent, $P(a \leqslant X \leqslant b) = P(a < X \leqslant b) = P(a \leqslant X < b) = P(a < X < b)$. Autrement dit, on ne change pas la probabilité en ajoutant les bornes de l'intervalle $[a; b]$ ou non.

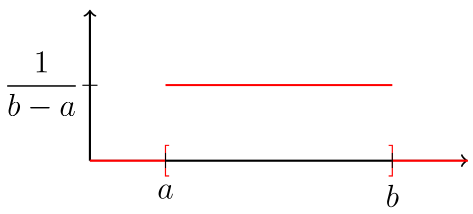
► **Exercices :** 19 à 21 p230

II. Loi uniforme

Définition Soit a et b deux nombres réels tels que $a < b$. Une variable aléatoire X suit la loi uniforme sur $[a; b]$ si elle a pour densité la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} \text{ si } a \leqslant x \leqslant b \\ \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

La variable X prend toutes les valeurs possibles dans l'intervalle $[a; b]$, et ce de manière uniforme.



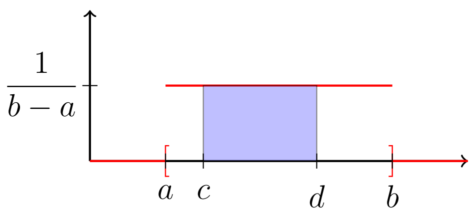
Propriété Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[a; b]$. Alors la fonction de répartition F est définie par :

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < a \\ \\ \dfrac{x-a}{b-a} \text{ si } a \leqslant x \leqslant b \\ \\ 1 \text{ si} x > b \end{cases}$$

Remarque Si X suit la loi uniforme sur $[a; b]$ et si c et d sont deux nombres de $[a; b]$ tels que $c < d$, alors

$$P(c \leqslant X \leqslant d) = \frac{d-c}{b-a}$$

soit le rapport entre l'amplitude de $[c; d]$ et celle de $[a; b]$.



▶ **Exercices :** 1,2 p223, 35p231 (sauf les questions sur l'espérance)

▶ **Exercices :** 37,38p231

III. Espérence

Rappel L'espérance d'une variable aléatoire X prenant un nombre fini de valeurs est donnée par :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \times P(X = x_i)$$

Soit la somme des produits des valeurs prises par leur probabilité d'être obtenues.

Définition De manière similaire, pour une variable aléatoire X prenant ses valeurs dans un intervalle $[a;b]$, et de densité f, son espérence est définie par :

$$E(X) = \int_a^b t \times f(t)dt$$

Propriété Si X suit la loi uniforme sur $[a;b]$, alors

$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$

Autrement dit, si l'on choisit un grand nombre de valeurs données aléatoirement et uniformément dans un intervalle $[a;b]$, alors la moyenne de ces valeurs sera proche de la valeur centrage de l'intervalle $[a;b]$.

▶ **Exercices :** questions sur la loi uniforme déjà vus : 1,2p223, 35p231

IV. Loi normale

Introduction : rappels graphiques sur la loi uniforme. Le mot « aléatoire » ne signifie pas toujours « uniformément réparti ». Exemple des tailles. Observation de la cloche. Observation de la loi binomiale, centrée réduite. Introduction de la fonction de densité de la loi normale centrée réduite.

1. Loi normale centrée réduite

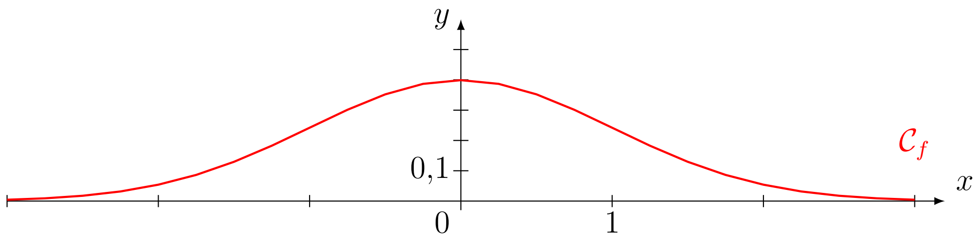
Définition Une variable aléatoire X suit la loi normale centrée réduite si elle admet pour densité la fonction :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

On note $\mathcal{N}(0;1)$ la loi normale centrée réduite.

Remarque Il n'y a pas d'expression de la primitive de f à l'aide de fonctions usuelles.
Par conséquent, aucune expression de la fonction de répartition ne peut être donnée.

Remarque La fonction f est paire, c'est à dire que la courbe admet l'axe des ordonnées pour axe de symétrie.

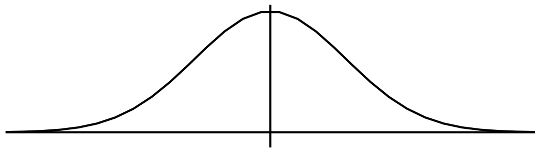


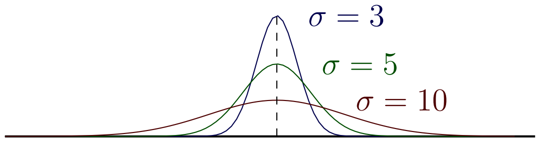
Représentation de la fonction f

2. Loi normale

Définition Une variable aléatoire X suit la loi normale centrée réduite de moyenne μ et d'écart-type σ si la variable aléatoire $\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite.
On note $\mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$ la loi normale de moyenne μ et d'écart-type σ.

La courbe de la fonction de densité pour une telle variable est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \mu$.





l'écart-type σ donne une indication des écarts des valeurs prises à la moyenne. Plus σ est grande, plus les écarts peuvent être importants. Ainsi, la courbe de f « s'élargit », tout en s'écrasant vers l'axe des abscisses (l'aire sous la courbe vaut toujours 1 !).

Méthode (Calculer une probabilité avec la calculatrice)
Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{N}(120; 10^2)$.
On veut déterminer la probabilité que $X > 150$.
Il faut se ramener au calcul d'une probabilité de la forme $P(a \leqslant X \leqslant b)$.
Ici, on a : $P(X > 150) = \frac{1}{2} - P(120 \leqslant X \leqslant 150)$ (faire une figure !)
On utilise la calculatrice pour calculer $P(120 \leqslant X \leqslant 150)$ (voir page 225).
On obtient : $P(X > 150) \simeq 0{,}5 - 0{,}49865 \simeq 0{,}00135$.

▶ **Exercices :** 5,6p225

▶ **Exercices :** 44,45,47 à 54 pp 232,233

3. Propriétés

Propriété Soit X une variable aléatoire qui suit la loi $\mathcal{N}(0; 1)$.
Alors

$$P(-1{,}96 \leqslant X \leqslant 1{,}96) \simeq 0{,}95$$

Propriété Soit X une variable aléatoire qui suit la loi $\mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$.
Alors

$$P(\mu - \sigma \leqslant X \leqslant \mu + \sigma) \simeq 0{,}68$$

$$P(\mu - 2\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 2\sigma) \simeq 0{,}95$$

$$P(\mu - 3\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 3\sigma) \simeq 0{,}99$$

Remarque Par symétrie de la courbe de la densité, on a : $P(X \leqslant \mu) = \frac{1}{2}$.

▶ **Exercices :** 7,8p226