LYCÉE MARIE CURIE **1ES**
2018–2019

Devoir surveillé n°2 – mathématiques
Correction

Exercice 1

1. L'abscisse du sommet est $\alpha = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-10}{2 \times (-3)} = \dfrac{5}{3}$.
   L'ordonnée du sommet est alors $f\left(\dfrac{5}{3}\right) = -3\left(\dfrac{5}{3}\right)^2 + 10 \times \left(\dfrac{5}{3}\right) + 32 = \cdots = \dfrac{121}{3}$.
   De plus, $a = -3 < 0$, donc les branches sont orientées vers le bas.
   On en déduit le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		$\frac{5}{3}$		$+\infty$
variations de f		$\nearrow$	$\frac{121}{3}$	$\searrow$	

2. On résout : $f(x) = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 10x + 32 = 0$.
   Pour cela on calcule : $\Delta = b^2 - 4ac = 10^2 - 4 \times (-3) \times 32 = 484 = 22^2 > 0$.
   Il y a donc deux solutions :
   $$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-10 - 22}{2 \times (-3)} = \frac{16}{3} \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-10 + 22}{-6} = -2$$
   Ainsi, $\mathcal{S} = \left\{-2; \dfrac{16}{3}\right\}$.
3. On connaît déjà les racines de la fonction f avec la question précédente, et on sait que $a = -3 < 0$, donc le tableau de signes est le suivant :

x	$-\infty$		-2		$\frac{16}{3}$		$+\infty$
signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

4. Les solutions de l'inéquation $f(x) > 0$ sont les valeurs de x pour lesquelles $f(x)$ est strictement positive (+), donc $\mathcal{S} = \left]-2; \dfrac{16}{3}\right[$.

Exercice 2

1. On développe :
   $$\begin{aligned} -2(x-3)(x-5) &- 2(x^2 - 5x - 3x + 15) \\ &= -2(x^2 - 8x + 15) \\ &= -2x^2 + 16x - 30 \\ &= g(x) \end{aligned}$$
2. On développe là aussi :
   $$\begin{aligned} -2(x-4)^2 + 2 &= -2(x^2 - 2 \times x \times 4 + 4^2) + 2 \\ &= -2(x^2 - 8x + 16) + 2 \\ &= -2x^2 + 16x - 32 + 2 \\ &= -2x^2 + 16x - 30 \\ &= g(x) \end{aligned}$$

3. (a) Pour calculer $g(0)$ on utilise la forme développée : $g(0) = -2 \times 0^2 - 16 \times 0 - 30 = -30$.
   (b) Pour $g(x) = 0$ on utilise la forme factorisée pour appliquer la règle du produit nul :

$$\begin{aligned} g(x) = 0 &\Leftrightarrow -2(x-3)(x-5) = 0 \\ &\Leftrightarrow x - 3 = 0 \text{ ou } x - 5 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 3 \text{ ou } x = 5 \end{aligned}$$

   Ainsi, $\mathcal{S} = \{3; 5\}$
   (c) g admet un maximum car $a = -2 < 0$, donc les branches de la parabole sont tournées vers le bas et le sommet correspond à un maximum.
   La valeur du maximum est $\beta = g(\alpha) = 2$.
   (On la lit dans la forme canonique $a(x-\alpha)^2 + \beta$)

Exercice 3
Les branches de la parabole sont tournées vers le haut, donc nécessairement $a > 0$.
Or pour k le coefficient a est négatif ($a = -1$), donc on peut éliminer k.
On observe ensuite que la courbe ne coupe pas l'axe des abscisses, autrement dit la fonction n'a pas de racine, ce qui implique que $\Delta < 0$.
On calcule alors les discriminants des fonctions f, g et p :
$\Delta_f = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 2 \times 4 = 1 - 32 = -31 < 0$
$\Delta_g = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 5 = 16 - 20 = -4 < 0$
$\Delta_p = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 4 = 16 - 16 = 0$
Ainsi on peut éliminer p.
Pour les fonctions f et g qui restent, on détermine l'abscisse du sommet α, qui doit être positif puisque le sommet se trouve à droite de l'axe des ordonnées.
$\alpha_f = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-1}{2 \times 2} = \dfrac{-1}{4} < 0$
$\alpha_g = \dfrac{-(-4)}{2 \times 1} = \dfrac{4}{2} = 2 > 0$
Ainsi seule la fonction g répond à tous les critères : c'est la fonction représentée par la parabole.