Chapitre : Pourcentages

∽

⊛ **Activité :** 1 et 2 page 69

1. Appliquer une évolution en pourcentage

Propriété Pour augmenter une valeur initiale V_i de $t\%$, on calcule les $t\%$ de V_i et on les ajoute à V_i. On obtient alors la valeur finale V_f :

$$V_f = V_i + \frac{t}{100} \times V_i$$

En factorisant par V_i, on peut voir qu'il suffit de multiplier V_i par $1 + \dfrac{t}{100}$:

$$V_f = \left(1 + \frac{t}{100}\right) \times V_i$$

Propriété Pour diminuer un nombre V_i de $t\%$, on fait de manière similaire :

$$V_f = V_i - \frac{t}{100} \times V_i = \left(1 - \frac{t}{100}\right) \times V_i$$

Exemple

- Calculer une augmentation de 15% d'une quantité Q c'est faire :
  $\left(1 + \dfrac{15}{100}\right) \times Q = (1 + 0{,}15)Q = 1{,}15 \times Q$
- calculer une baisse de 8% d'un prix P c'est faire :
  $\left(1 - \dfrac{8}{100}\right) \times P = (1 - 0{,}08)P = 0{,}92 \times P$

► **Exercices :** 7,8p74, 34p80

Méthode Si on connaît la valeur finale V_f et l'évolution en pourcentage, on peut déterminer la valeur initiale V_i en résolvant une équation.

Exemple 10p74

► **Exercices :** 39,40,43p80

2. Coefficient multiplicateur et taux d'évolution

Une quantité (par exemple un prix) passe de V_i à V_f.

Définition On appelle **coefficient multiplicateur** le nombre $CM = \dfrac{V_f}{V_i}$.
C'est le nombre par lequel on a multiplié V_i pour obtenir V_f, autrement dit $CM \times V_i = V_f$.

Remarque Si les valeurs V_i et V_f sont positives, le coefficient multiplicateur est toujours positif.
Dans ce cas,

- $CM > 1$ si et seulement si $V_f > V_i$ (c'est une hausse) ;
- $CM < 1$ si et seulement si $V_f < V_i$ (c'est une baisse).

Propriété La **variation relative** ou **taux d'évolution** (en pourcentage) est :

$$t = \frac{V_f - V_i}{V_i} \times 100 = \frac{\text{valeur finale} - \text{valeur initiale}}{\text{valeur initiale}} \times 100$$

⚠ Le taux d'évolution est **positif ou négatif**, selon qu'il s'agit respectivement d'une augmentation ou d'une baisse.

Exemple Une valeur passe de 120 à 80. Le taux d'évolution en pourcentage est donc : $\frac{80-120}{120} \times 100 = \frac{-40}{120} \times 100 = -\frac{1}{3} \times 100 \simeq -33{,}3$. La valeur a donc baissé de 33,3% environ.

Remarque On peut réécrire : $t = \left(\frac{V_f}{V_i} - 1\right) \times 100 = (CM - 1) \times 100$.
On a donc la relation suivante entre le taux et le coefficient multiplicateur :

$$t = (CM - 1) \times 100$$

Dans l'autre sens, on peut exprimer CM en fonction de t :

$$CM = 1 + \frac{t}{100}$$

⚠ t est négatif lorsqu'il s'agit d'une baisse

Exemples
Un coefficient multiplicateur $CM = 1{,}15$ correspond à une hausse de 15% car $(1{,}15 - 1) \times 100 = 15$.
Un coefficient multiplicateur $CM = 0{,}80$ correspond à une baisse de 20% car $(0{,}80 - 1) \times 100 = -20$.

▶ **Exercices :** 1,2,3,4,5,6p74, 38,42p80

★ **Approfondissement :** 44,45,46,48p81, 53p83

3. Évolutions successives

Appliquer successivement des pourcentages peut se voir comme faire des multiplications successives.
Soit Q_0 une quantité initiale. Soit t_1% et t_2% des taux (positifs ou négatifs) d'évolution.
Après la première augmentation, on a une quantité $Q_1 = \left(1 + \frac{t_1}{100}\right) \times Q_0 = CM_1 \times Q_0$.
La quantité finale est alors

$$Q_2 = \left(1 + \frac{t_2}{100}\right) \times Q_1 = \left(1 + \frac{t_2}{100}\right) \times \left(1 + \frac{t_1}{100}\right) \times Q_0 = CM_2 \times CM_1 \times Q_0$$

Exemple Un livret d'épargne rapporte 2% par an. Lorsque l'on débute un livret en déposant 500€, au bout de deux ans (donc deux augmentations successives de 2%) le compte contient :

$$500 \times \left(1 + \frac{2}{100}\right) \times \left(1 + \frac{2}{100}\right) = 500 \times 1{,}02 \times 1{,}02 = 520{,}20€$$

Remarque On peut observer que deux augmentations successives de 2% ne correspondent pas à une seule augmentation de 4% (mais à un peu plus).

▶ **Exercices :** 18,19,20p75

▶ **Exercices :** (après lecture de l'exercice résolu) 13,16,17p75

▶ **Exercices :** 60,62p83

★ **Approfondissement :** 63,64p83, 66p84

4. Évolution réciproque

Propriété Soit t une évolution en pourcentage (éventuellement négative), d'une valeur V_i vers une valeur V_f. On cherche le taux t' réciproque d'évolution à appliquer pour obtenir V_i à partir de V_f.
On rappelle que $CM = 1 + \dfrac{t}{100}$ et qu'ainsi $V_f = \left(1 + \dfrac{t}{100}\right) \times V_i = CM \times V_i$, on a alors

$$V_i = \frac{V_f}{CM} = \frac{1}{CM} \times V_f$$

Le coefficient multiplicateur réciproque CM' est donc l'inverse du coefficient multiplicateur :
$CM' = \dfrac{1}{CM}$. Le taux de variation réciproque t' vaut alors $t' = (CM' - 1) \times 100 = \left(\dfrac{1}{CM} - 1\right) \times 100$.

Exemple Une valeur a augmenté de 50%. Quelle évolution en pourcentage doit-on appliquer pour retrouver la valeur initiale ? Autrement dit, quelle est l'évolution réciproque ?
On a $V_f = V_i \times \left(1 + \dfrac{50}{100}\right) = V_i \times 1{,}5$.
donc $V_i = V_f \times \dfrac{1}{1{,}5}$. Ainsi $CM' = \dfrac{1}{1{,}5} \simeq 0{,}67$.
Alors $t' = (CM' - 1) \times 100 \simeq (0{,}67 - 1) \times 100 \simeq -33$.
Il s'agit donc d'une baisse de 33% environ.

▶ **Exercices :** 23,25,27p76

5. Indices

Si on considère des évolutions successives dans le temps, il peut être pratique de les représenter en choisissant une date de référence à laquelle on associe un indice 100. Pour les autres dates, on calcule alors des indices calculés proportionnellement aux valeurs réelles à partir de l'indice 100 de départ. La formule donnant l'indice à une date donnée est la suivante :

$$\text{Indice à la date } k = \frac{\text{Valeur à la date } k}{\text{Valeur à la date de référence}} \times 100$$

Si la date de référence est n, on dit que les indices sont les indice en base 100 à la date n.

Exemple Voir le tableau à la page 72.

Remarque On lit facilement les taux d'évolution de la date de référence à une date **postérieure**.

Exemple Voir les évolutions dans le tableau page 72.

▶ **Exercices :** 82,81,80p87

▶ **Exercices :** (en salle informatique, avec tableur) 83,84,85pp87-88