

Chapitre :

Second degré



I. Différentes formes

Rappel Une fonction polynomiale du second degré est une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont l'expression peut être écrite sous la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$, où a , b et c sont des réels avec $a \neq 0$. L'expression $ax^2 + bx + c$ est appelée **polynôme de degré 2** ou **trinôme du second degré**.

Définition L'expression d'une fonctions polynomiale de degré 2 peut s'écrire sous deux à trois formes différentes :

- **développée** : $f(x) = ax^2 + bx + c$
- **canonique** : $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ (parfois factorisée : $f(x) = a \left[(x - \alpha)^2 + \frac{\beta}{a} \right]$).
- **factorisée (n'existe pas toujours)** : $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

Le nombre a est le même dans les trois expressions.

Exemple Soit $f(x) = 4x^2 + 4x - 24$.

La forme canonique de f est $4 \left(x + \frac{1}{2} \right)^2 - 25$, avec $\alpha = -\frac{1}{2}$ et $\beta = -25$.

En effet, $4 \left(x + \frac{1}{2} \right)^2 - 25 = 4 \left(x^2 + 2x \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) - 25 = 4x^2 + 4x + 1 - 25 = 4x^2 + 4x - 24 = f(x)$.

La forme factorisée de f est $4(x - 2)(x + 3)$, avec $x_1 = 2$ et $x_2 = -3$.

En effet, $4(x - 2)(x + 3) = 4(x^2 + 3x - 2x - 6) = 4x^2 + 4x - 24 = f(x)$.

► **Exercices** : questions 1 des exercices 26,27,28,29,30,31p28

II. Équation du second degré

Définition Résoudre une équation du second degré, c'est déterminer les réels x qui vérifient une égalité pouvant s'écrire sous la forme :

$$ax^2 + bx + c = 0$$

avec $a \neq 0$.

Les solutions, si elles existent, sont appelées **racines** du polynôme $ax^2 + bx + c$.

Elles sont les abscisses des points d'intersections de la parabole avec l'axe des abscisses.

Définition On appelle **discriminant** du polynôme du second degré $ax^2 + bx + c$ le nombre :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Ce nombre est utilisé pour la résolution des équations du second degré.

Théorème | Il y a trois cas en fonctions de Δ :

- Si $\Delta > 0$, alors l'équation admet 2 solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Si $\Delta = 0$, alors l'équation admet une seule solution :

$$\alpha = \frac{-b}{2a}$$

- Si $\Delta < 0$, alors l'équation n'a pas de solution.

Exemple Soit $f(x) = -x^2 + x + 6$.

Alors $\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times (-1) \times 6 = 25 > 0$. Il y a donc deux racines :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 - \sqrt{25}}{2 \times (-1)} = \frac{-1 - 5}{-2} = 3 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 + 5}{-2} = -2$$

Ainsi, $\mathcal{S} = \{-2; 3\}$.

► Exercices : 1 à 12p25

III. Représentation graphique

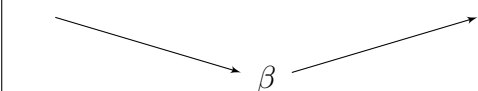
Cette section est un rappel de seconde, avec quelques observations graphiques supplémentaires.

La représentation graphique d'une fonction polynomiale de degré 2 est une **parabole**.

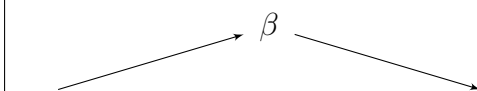
Soit $f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)^2 + \beta$. Alors :

- Le signe de a donne l'orientation de la parabole :
 - ★ Si $a > 0$, alors les branches sont vers le haut ;
 - ★ Si $a < 0$, alors les branches sont vers le bas.
- Le point de coordonnées $(\alpha; \beta)$ est le sommet de la parabole.
La parabole est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \alpha$.
De plus, $\alpha = \frac{-b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$.

Par conséquent on a les tableaux de variation suivants :

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$			

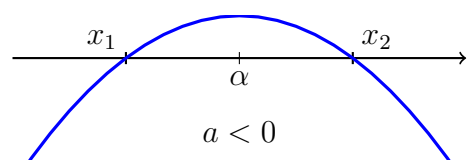
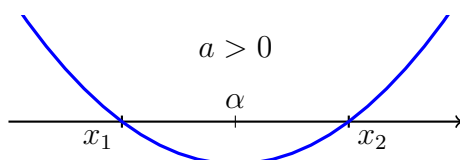
Cas $a > 0$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$			

Cas $a < 0$

Voici les 6 cas possibles en fonction de Δ et a :

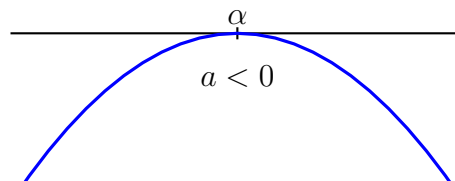
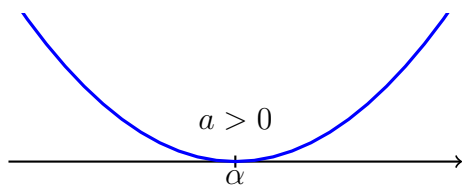
- Si $\Delta > 0$, la parabole coupe deux fois l'axe des abscisses.



De plus, l'abscisse du sommet α est la moyenne des racines : $\alpha = \frac{x_1 + x_2}{2}$.

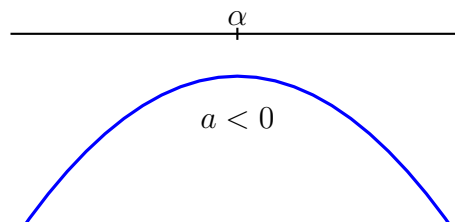
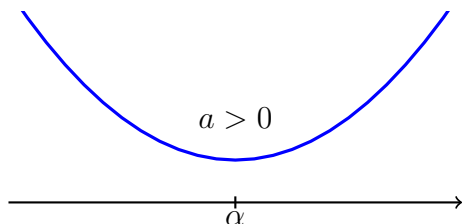
Dans ce cas, on peut écrire $f(x)$ sous forme factorisée : $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.

- Si $\Delta = 0$, la parabole touche une seule fois l'axe des abscisses, précisément en son sommet.



Dans ce cas l'expression de $f(x)$ peut être donnée sous la forme $f(x) = a(x - \alpha)^2$.

- Si $\Delta < 0$, la parabole ne coupe pas l'axe des abscisses.



► Exercices : 82,83,84p33

IV. Signe du trinôme

Grâce aux cas énumérés précédemment, on peut donner le signe d'un trinôme de degré 2.

Rappel Étudier le signe d'une fonction revient à étudier la position relative de la courbe représentative par rapport à l'axe des abscisses :

- Lorsque $f(x) > 0$, alors la courbe représentative est située au dessus de l'axe des abscisses ;
- Lorsque $f(x) < 0$, alors la courbe représentative est située en dessous de l'axe des abscisses ;
- Lorsque $f(x) = 0$, alors la courbe représentative est située sur l'axe des abscisses.

Propriété Le signe de $f(x) = ax^2 + bx + c$ est le plus souvent du signe de a . Dans le cas où il y a deux racines, alors le signe « entre les racines » est le contraire de celui de a .

L'étude du signe de $ax^2 + bx + c$ dépend donc de a et de Δ .

Exemple Reprenons $f(x) = -x^2 + x + 6$. On sait que $\Delta > 0$ et que les racines sont $x_1 = 3$ et $x_2 = -2$. De plus, $a = -1 < 0$. Alors on a le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$	-2	3	$+\infty$	
signe de $f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Si on veut résoudre $f(x) < 0$, l'ensemble des solutions est alors : $\mathcal{S} =]-\infty; -2[\cup]3; +\infty[$.

► Exercices : 13 à 25p26

★ **Approfondissement** : 77,78,79,80p33 (inéquations avec expressions de degré 3 factorisées)

► Exercices : questions 2 et suivantes des 26 à 31p28

★ **Approfondissement** : 115,116p37