Chapitre :
Suites

I. Modes de génération

⊛ **Activité :** fiche donnant un aperçu des suites et leurs modes de génération.

Définition Une suite numérique u est une fonction pour laquelle la variable ne prend que des nombres entiers naturels. Ainsi, le plus souvent, u est définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, c'est à dire pour tout entier naturel $n \geqslant 0$. On utilise la notation en indice u_n pour $u(n)$, image par u de n.

On considère deux manières de définir une suite :

- De manière **explicite**, en écrivant l'expression de u_n en fonction de n.
  On dit que u_n est le terme général de la suite.

  Exemple soit u la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 3n + 2$.
  On peut calculer n'importe quel terme de la suite. Ainsi par exemple $u_7 = 3 \times 7 + 2 = 23$.

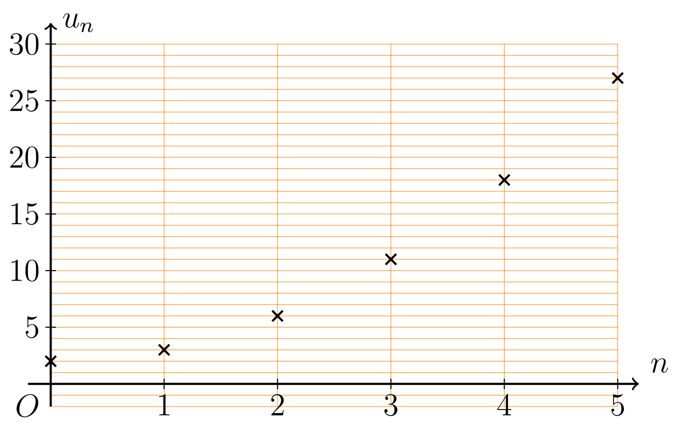
- **par récurrence**, en définissant u_{n+1} en fonction de u_n (autrement dit un terme en fonction du précédent). Il faut alors nécessairement donner la valeur du premier terme.

  Exemple Soit u la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 2u_n + 1$.
  La donnée d'un terme permet de calculer le suivant.
  Ainsi, $u_1 = 2u_0 + 1 = 2 \times 1 + 1 = 3$ puis $u_2 = 2u_1 + 2 = 2 \times 3 + 2 = 7$, etc ...

► **Exercices :** questions a) et b) des exercices 1 à 5p102 (explicites)

► **Exercices :** questions a) des exercices 7 à 11p103 (par récurrence)
On peut représenter une suite par les points de coordonnées $(n; u_n)$.

Exemple Représentation graphique de la suite u définie par : $u_n = n^2 + 2$:



On ne relie pas les points !

▶ **Exercices :** question c) de l'exercice 5p102, question b) de l'exercice 9p103

Méthode Voir page 111 la manière de définir une suite, afficher les termes et la représentation graphique.

II. Variations

Définition Soit u une suite. On dit que :

- u est croissante si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq u_n$;
- u est décroissante si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq u_n$.

Méthode Pour déterminer la variation d'une suite u, on étudie alors le signe de $u_{n+1} - u_n$, **avec n quelconque**.

- Si quelque soit $n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$, alors u est décroissante.
- Si quelque soit $n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$, alors u est croissante.

Exemple Étudions la variation de la suite u définie par : $u_n = \dfrac{n^2+1}{2}$. On a :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(n+1)^2+1}{2} - \frac{n^2+1}{2} = \frac{(n+1)^2+1-(n^2+1)}{2} = \frac{n^2+2n+1+1-n^2-1}{2} = \frac{2n+1}{2}.$$

Or n est un nombre entier naturel, donc tous les termes de l'expression $\dfrac{2n+1}{2}$ sont **positifs**.
On en déduit que $u_{n+1} - u_n > 0$, donc la suite u est croissante.

On ne connaît généralement pas le signe de u_n, qui n'a *a priori* aucune raison d'être positif.

▶ **Exercices :** 70,71,73,74,78p112

Propriété Soit f une fonction et u une suite définie par $u_n = f(n)$.
Si f est croissante (resp. décroissante) sur $[0; +\infty[$ alors u est croissante (resp. décroissante).

Exemple Soit $u_n = -2n + 3$. On a $u_n = f(n)$ avec $f(x) = -2x + 3$. Or f est une fonction affine, dont l'expression est de la forme $f(x) = ax + b$ avec $a = -2 < 0$ donc f est décroissante sur $\mathbb{R}$, donc sur $[0; +\infty[$. Finalement, la suite u est décroissante.

▶ **Exercice :** 70p112 en utilisant la méthode précédente

▶ **Exercices :** (algorithmes) 119 à 123 p120

III. Suites arithmétiques

⊛ **Activité :** 2p95

Définition Une suite arithmétique u de raison r est une suite qui vérifie que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$. Autrement dit, pour passer d'un terme au suivant, on ajoute la raison r.

Méthode Pour démontrer qu'une suite est arithmétique, on exprime $u_{n+1} - u_n$ et on montre que c'est une constante r, qui est alors la raison de la suite.

Exemple la suite définie par $u_n = 5n + 3$ est une suite arithmétique de raison 5.
En effet, $u_{n+1} - u_n = 5(n+1) + 3 - (5n+3) = 5n + 5 + 3 - 5n - 3 = 5$, donc $u_{n+1} = u_n + 5$.

▶ **Exercices :** 37 à 40p105

Méthode Pour démontrer qu'une suite n'est pas arithmétique, on calcule des différences de termes successifs, et on montre que deux d'entre elles ne sont pas égales.

Exemple Soit u une suite telle que $u_0 = 2$, $u_1 = 4$ et $u_2 = 5$.
Alors $u_1 - u_0 = 4 - 2 = 2$ mais $u_2 - u_1 = 5 - 4 = 1 \neq 2$, donc u n'est pas arithmétique.

Propriété Une suite u est arithmétique de raison r si et seulement si $u_n = r \times n + u_0$

Remarque Autrement dit, une suite arithmétique est une fonction affine de la variable $n \in \mathbb{N}$, la raison de la suite étant le coefficient directeur.

Propriété Une égalité pratique pour certains calculs : Soit u une suite arithmétique de raison r. Pour $n \geq p$, on a

$$u_n = r(n-p) + u_p$$

Propriété Soit u une suite arithmétique de raison r.
- Si $r > 0$, alors u est croissante.
- Si $r < 0$, alors u est décroissante.

▶ **Exercices :** 31 à 36p105 (hors représentation graphique, ou à la calculatrice)

▶ **Exercices :** 88 à 91p113

▶ **Exercices :** 93,94pp113,114 (nécessite une salle informatique)

IV. Suites géométriques

⊛ **Activité :** 3p95

Définition Une suite géométique u de raison q est une suite qui vérifie que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n \times q$. Autrement dit, pour passer d'un terme au suivant, on ajoute multiplie par la raison q.

Méthode Pour démontrer qu'une suite est géométrique, on exprime le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ et on montre que c'est une constante q, qui est alors la raison de la suite.

Exemple la suite définie par $u_n = 3 \times 5^n$ est une suite géométrique de raison 5.
En effet, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{3 \times 5^{n+1}}{3 \times 5^n} = \dfrac{3 \times 5^n \times 5}{3 \times 5^n} = 5$, donc $u_{n+1} = u_n \times 5$.

▶ **Exercices :** 100,101,102p114

▶ **Exercices :** 47 à 52p106

Méthode Pour montrer qu'une suite n'est pas géométrique, on calcule des quotients de termes successifs de la suite, et on montre que deux d'entre eux ne sont pas égaux.

Exemple Soit u la suite définie par $u_n = 2n + 4$. Alors $u_0 = 4$, $u_1 = 6$ et $u_2 = 8$.
Par suite, $\dfrac{u_1}{u_0} = \dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2}$ mais $\dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{8}{6} = \dfrac{4}{3} \neq \dfrac{3}{2}$.
Donc la suite u n'est pas géométrique.

Propriété Une suite u est géométrique de raison q si et seulement si $u_n = u_0 \times q^n$

Propriété Une égalité pratique pour certains calculs : Soit u une suite géométrique de raison q. Pour $n \geq p$, on a

$$u_n = q^{n-p} \times u_p$$

▶ **Exercices :** 103,104p115

Propriété Soit u une suite géométrique de raison $q > 0$ et de terme initial $u_0 > 0$.

- Si $q > 1$, alors u est croissante.
- Si $0 < q < 1$, alors u est décroissante.

▶ **Exercices :** 45,46p106

★ **Approfondissement :** 106,109pp116,117 (suites arithmético-géométriques)

★ **Approfondissement :** (DM ?) 137p123