Chapitre : Probabilités

∽

I. Variables aléatoires

⊛ **Activité :** (rappels sur les probabilités, à faire à la maison) page 152

⊛ **Activité :** 1p153 (expérience avec un gain associé)

1. Définition

On considère une expérience aléatoire et E l'ensemble des issues possibles de cette expérience.

Définition On définit une **variable aléatoire** X lorsque l'on associe à toute issue de l'expérience un nombre réel.
On note « $X = x_i$ » l'événement constitué des issues auxquelles on associe la valeur x_i.

Exemple On lance deux dés à 4 faces et on s'intéresse à la somme obtenue. L'ensemble des issues est donc $\{2{,}3,\dots,8\}$. On associe à chaque issue un gain X en euros qui vaut :
- 8 si la somme est 2 ou 8 ;
- $-1{,}15$ sinon.

X est donc une variable aléatoire discrète car elle ne prend que deux valeurs ($-1{,}15$ et 8).
L'événement $X = 8$ est l'ensemble $\{2{,}8\}$, l'événement $X = -1{,}15$ est $\{3{,}4{,}5{,}6{,}7\}$.

2. Loi de probabilité

Définition Une loi de probabilité d'une variable aléatoire X est une fonction qui à tout événement « $X = x_i$ » associe un réel p_i compris entre 0 et 1 de sorte que la somme des p_i vaille 1.
On a donc :

$$\mathbb{P}(X = x_i) = p_i \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{n} p_i = p_1 + \cdots + p_n = 1$$

Déterminer la loi probabilité d'une variable aléatoire X c'est donner les probabilités p_i, le plus souvent sous forme de tableau.

Exemple On considère l'exemple débuté plus haut. Les issues peuvent être représentées dans un tableau à double entrée :

X	1	2	3	4
1	8	-1	-1	-1
2	-1	-1	-1	-1
3	-1	-1	-1	-1
4	-1	-1	-1	8

Si l'on considère les dés bien équilibrés, Les issues constituées d'un couple de faces sont équiprobables.
La loi de probabilité de X est donc (après simplification des fractions) :

x_i	$-1{,}15$	8
$\mathbb{P}(X = x_i)$	$\dfrac{7}{8}$	$\dfrac{1}{8}$

▶ **Exercices :** 1 à 5p155

▶ **Exercices :** 28,29,30,31,34p162

▶ **Exercice :** (en DM ?) 39p163, 42p164

3. Espérance

⊛ **Activité :** 2p153

Définition L'espérance d'une variable aléatoire X, notée $E(X)$, est la moyenne des valeurs x_i pondérées par leur probabilité :

$$E(X) = p_1 \times x_1 + p_2 \times x_2 + \cdots + p_n \times x_n$$

Exemple Toujours avec le même exemple, $E(X) = \dfrac{7}{8} \times (-1{,}15) + \dfrac{1}{8} \times 8 = -0{,}00625$.
Cela signifie qu'à ce jeu on est très légèrement perdant.
Par exemple pour 1000 parties on perdrait en moyenne environ 6,25€.

Définition Une expérience aléatoire associée à une variable aléatoire X qui représente un gain est dite **équitable** si $E(X) = 0$.

Remarque Une espérance étant une moyenne, elle en possède les mêmes propriétés.
En particulier elle peut se calculer à l'aide de la calculatrice, dans la partie statistiques.
Voir la page 160 pour la méthode.

▶ **Exercices :** 6 à 9 p156

▶ **Exercices :** 45,46,47,48,49 p165

▶ **Exercices :** 53p166

II. Répétition d'expériences

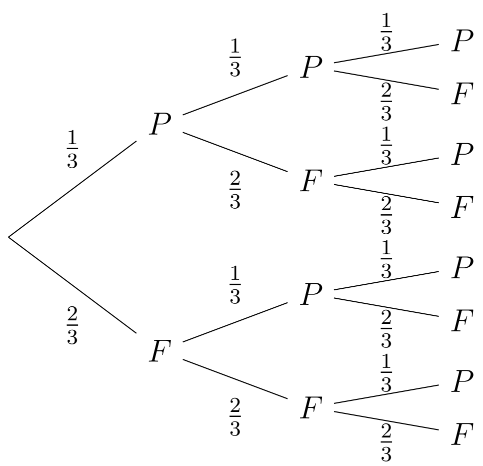
<u>**Définition**</u> On dit que l'on réalise **une succession d'expériences identiques et indépendantes** lorsque l'on fait successivement la même expérience aléatoire dans les mêmes conditions.
C'est le cas en particulier quand on fait un tirage **avec** remise, ou lorsque l'on lance un dé à plusieurs reprises (dans les mêmes conditions). Une issue d'une telle succession d'expériences est alors une liste des résultats de l'expérience aléatoire répétée.

<u>**Exemple**</u>

- Lancer trois fois de suite une pièce. Une issue peut être P-P-F.
- Faire un tirage avec remise dans une urne contenant des boules noires, blanches et rouges. Si l'on répète l'expérience quatre fois, une issue peut être B-R-B-N.

Pour représenter une telle succession d'expériences, on peut utiliser un arbre de probabilités pondéré. Chaque niveau de l'arbre correspond à une des répétitions de l'expérience. Si l'expérience est répétée n fois, l'arbre a donc n niveaux (la racine étant le niveau 0).
On note sur les branches les probabilités des issues.

<u>**Exemple**</u> En supposant la pièce non équilibrée avec $\mathbb{P}(P) = \dfrac{1}{3}$ et $\mathbb{P}(F) = \dfrac{2}{3}$, alors l'expérience décrite plus haut peut être représentée ainsi :



La probabilité d'une liste de résultats est égale au produit des probabilités de chaque résultat. Ainsi, il suffit de faire le produit le long de la branche concernée.

<u>**Exemple**</u> La probabilité de F-P-P est : $\mathbb{P}(\text{F-P-P}) = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{27}$.

Si l'on s'intéresse à la probabilité d'un événement associé à plusieurs branches de l'arbre, alors on ajoute les probabilités des diverses branches.

<u>**Exemple**</u> La probabilité de n'avoir eu que des piles ou que des faces est :
$\mathbb{P}(\text{P-P-P}) + \mathbb{P}(\text{F-F-F}) = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3} \times \dfrac{2}{3} \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{27} + \dfrac{8}{27} = \dfrac{9}{27} = \dfrac{1}{9}$.

▶ **Exercices :** 10 à 16 p158, 69 à 72p169, 74p170

▶ **Exercices :** (en DM ?) 77 et 78p170, 80p171

III. Loi binomiale

1. Épreuve de Bernoulli

Définition On appelle **épreuve de Bernoulli** une expérience aléatoire présentant deux issues, l'une S appelée succès et l'autre $\overline{S}$ appelée échec. On note p la probabilité du succès, puis $q = 1 - p$ la probabilité de l'échec. La variable aléatoire X qui prend la valeur 1 en cas de succès et 0 en cas d'échec est appelée variable aléatoire de Bernoulli. La loi de probabilité, appelée **loi de Bernoulli de paramètre $\boldsymbol{p}$** est alors donnée par :

x_i	0	1
$P(X = x_i)$	$1 - p$	p

Propriété Si la variable aléatoire X suit une loi de Bernoulli de paramètre p, alors $E(X) = p$.

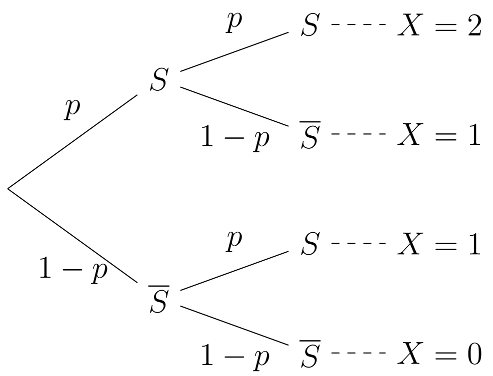
▶ **Exercices :** 49 à 52 p197

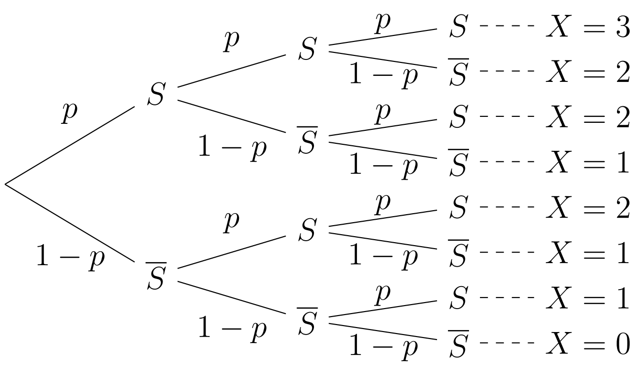
2. Schéma de Bernoulli et loi binomiale

Définition L'expérience aléatoire consistant à répéter n fois ($n \in \mathbb{N}^\star$) de manière indépendante une épreuve de Bernoulli de paramètre p s'appelle un **schéma de Bernoulli de paramètres $\boldsymbol{n}$ et $\boldsymbol{p}$**. On considère la variable aléatoire X égale au nombre de succès obtenus au cours des n épreuves. On appelle alors **loi binomiale de paramètres $\boldsymbol{n}$ et $\boldsymbol{p}$** la loi de probabilité de X. On la note $\mathcal{B}(n,p)$.

Remarque Le nombre X de succès est toujours un nombre compris entre 0 et n.

Exemple Voici des représentations sous forme d'arbre pour $n = 2$ et $n = 3$.
Déterminer les lois de probabilités de X dans chaque cas.





Méthode La calculatrice peut donner les valeurs des probabilités suivantes :

- $\mathbb{P}(X = k)$
  en Casio : BinominalPD(k,n,p)
  en TI : binomFdp(n,p,k)
- $\mathbb{P}(X \leqslant k)$:
  en Casio : BinominalCD(k,n,p)
  en TI : binomFRép(n,p,k)

Pour les obtenir :

en Casio : $\boxed{\text{OPTN}} \rightarrow \boxed{\text{STATS}} \rightarrow \boxed{\text{DIST}} \rightarrow \boxed{\text{BINM}}$

en TI : $\boxed{\text{2nd}} \rightarrow \boxed{\text{DISTR}}$

▶ **Exercices :** 59 à 64 p198 (n petit)

▶ **Exercices :** 80 à 84 p201, 92 à 94 p202 (n plus grand)

Propriété L'espérance mathématique d'une variable X qui suit la loi $\mathcal{B}(n;p)$ est np.

▶ **Exercices :** 104,105,109 p205

3. Coefficients binomiaux

Définition Soit n un entier naturel et k un entier compris entre 0 et n. Le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ est le nombre de chemins réalisant k succès pour n répétitions sur l'arbre d'un schéma de Bernoulli.

Méthode Pour obtenir les coefficients binomiaux, on peut utiliser la calculatrice :

- En Casio : $\boxed{\text{OPTN}} \rightarrow \boxed{\text{PROB}} \rightarrow$ **nCr** ;
- En TI : $\boxed{\text{MATH}} \rightarrow \boxed{\text{PRB}} \rightarrow$ **Combinaison**.

Taper d'abord n, puis la commande, puis k.

On peut donc maintenant donner une écriture générale de la loi binomiale $\mathcal{B}(n;p)$.

Propriété Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n;p)$.
Alors, pour tout k compris entre 0 et n,

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

▶ **Exercices :** 67,68,69,72 p199

★ **Approfondissement :** 95p202, 97,98p203