Chapitre : Dérivation

∽

I. Nombre dérivé

⊛ **Activité :** page 40 (Rappels sur les coefficients directeurs de droites)

▶ **Exercices :** 74,75p56

Rappel Soit A et B deux points d'un repère.
Le coefficient directeur m de la droite (AB) est donné par la formule :

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

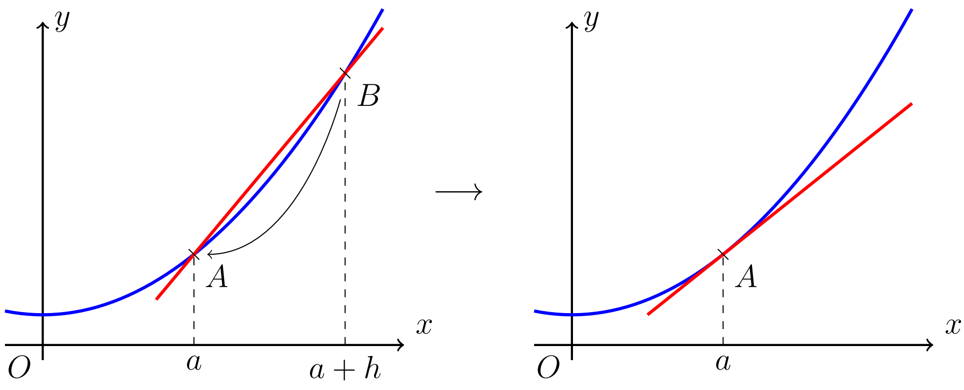
Définition Soit f une fonction définie sur un intervalle I, et soit a et b deux nombres de I, $a \neq b$.
Le **taux de variation** de la fonction f entre a et b est le quotient :

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Il s'agit du coefficient directeur de la droite sécante à la courbe représentative de f passant par les points $A(a; f(a))$ et $B(b; f(b))$ appartenant à cette courbe.
En notant $b = a + h$, on obtient la formule suivante pour le taux de variation :

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

En approchant le point B vers le point A tout en restant sur la courbe $\mathcal{C}_f$, c'est à dire en faisant approcher h de 0, la sécante s'approche d'une droite particulière, la **tangente** à $\mathcal{C}_f$ passant par le point A d'abscisse a (droite rouge dans la figure ci-dessous à droite).



Définition Le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a est appelé **nombre dérivé** de f en a. On le note $f'(a)$.
On note alors : $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

Exemple soit $f(x) = 2x^2 + 5x - 2$. et $a = 1$. Alors

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{2(1+h)^2 + 5(1+h) - 2 - (2(1)^2 + 5(1) - 2)}{h} = \frac{2h^2 + 4h + 5h}{h} = 2h + 9$$

Cette expression s'approche de 9 quand h s'approche de 0. Donc $f'(1) = 9$.

Ces calculs sont laborieux, nous admettrons les résultats de la section suivante qui permettent d'être plus efficaces.

II. Fonction dérivée

1. Définition

Définition Soit f une fonction définie sur un intervalle I qui admet un nombre dérivé en tout nombre a de I. On définit alors la fonction dérivée de f sur I, notée f', par :

$$f' : x \longmapsto f'(x)$$

Propriété Ci-dessous, un tableau de fonctions dont les dérivées sont à connaître :

fonction f	dérivable sur	dérivée f'
$f(x) = c$ (c constante)	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x^n$ ($n \in \mathbb{N}^\star$)	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$]-\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$]0; +\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Exemples Cas particuliers de la formule pour x^n :
- si $f(x) = x$, alors $f'(x) = 1$.
- si $f(x) = x^2$, alors $f'(x) = 2x$.
- si $f(x) = x^3$, alors $f'(x) = 3x^2$.

Remarque La fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0.

2. Règles de calcul

Propriété Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I.
- Soit k un réel, alors ku est dérivable sur I et $(ku)' = ku'$.
- $u + v$ est dérivable sur I et $(u + v)' = u' + v'$.
- uv est dérivable sur I et $(uv)' = u'v + uv'$.

- $\dfrac{u}{v}$ est dérivable en tout x de I tel que $v(x) \neq 0$ et $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.
- (cas particulier) $\dfrac{1}{v}$ est dérivable en tout x de I tel que $v(x) \neq 0$ et $\left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}$.

Les deux premiers points permettent de calculer en particulier la dérivée de n'importe quelle fonction polynomiale en utilisant les formules données dans la section précédente.

Exemple Soit $f(x) = 5x^3 + 2x^2 - 7x + 9$. La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 5 \times (3x^2) + 2 \times (2x) - 7 \times 1 + 0 = 15x^2 + 4x - 7$.

▶ **Exercices :** 27 à 36 p55 (sauf 34 ?)
Pour toutes les fonctions sous forme de produit ou de quotient, il est nécessaire de détailler le calcul de dérivation.
Attention aux notations, et à bien utiliser les parenthèses.

Exemple Soit $f(x) = (5x^2 + 3)\sqrt{x}$. f est de la forme uv avec $u(x) = 5x^2 + 3$ et $v(x) = \sqrt{x}$.
Alors $u'(x) = 5 \times (2x) + 0 = 10x$ et $v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.
Par suite, $f' = (uv)' = u'v + uv'$, donc $f'(x) = (10x)\sqrt{x} + (5x^2+3)\dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{20x^2 + 5x^2 + 3}{2\sqrt{x}} = \dfrac{25x^2 + 3}{2\sqrt{x}}$.

Exemple Soit $f(x) = \dfrac{5x + 3}{x^2 + 2x + 4}$.
f est de la forme $\dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = 5x + 3$, $v'(x) = x^2 + 2x + 4$. Alors $u'(x) = 5$ et $v'(x) = 2x + 2$.
Par suite, $f' = \left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ donc :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{5(x^2 + 2x + 4) - (5x + 3)(2x + 2)}{(x^2 + 2x + 4)^2} = \frac{5x^2 + 2x + 4 - (10x^2 + 10x + 6x + 6)}{(x^2 + 2x + 4)^2} \\ &= \frac{5x^2 + 2x + 4 - 10x^2 - 10x - 6x - 6}{(x^2 + 2x + 4)^2} = \frac{-5x^2 - 14x - 2}{(x^2 + 2x + 4)^2} \end{aligned}$$

Remarque Pour les fonctions de la forme $\dfrac{u}{v}$, en général on ne développe pas l'expression v^2 au dénominateur.

▶ **Exercices :** 40 à 45 p55

▶ **Exercices :** 46 à 62 p 55 (un maximum)

Propriété Soit f une fonction admettant un nombre dérivé en a. Alors la tangente à la courbe de f en a a pour équation :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Démonstration : Notons $y = mx + p$ l'équation de la droite. Le coefficient directeur de la tangente vaut $f'(a)$ d'après la définition, donc $m = f'(a)$. Or la droite, tangente à la courbe de f, passe par le point de coordonnées $(a; f(a))$. Ainsi, $f(a) = f'(a)a + p$. Donc $p = f(a) - f'(a)a$ et l'équation de la droite est alors :

$$y = f'(a)x + f(a) - f'(a)a = f'(a)(x - a) + f(a)$$

▶ **Exercices :** 80 à 89 p 56 (un maximum)

3. Utilisation pour les variations

Nous avons déjà pu faire les observations suivantes :

Propriété

- Si f est croissante sur I, alors pour tout $x \in I$, $f'(x) \geq 0$;
- Si f est décroissante sur I, alors pour tout $x \in I$, $f'(x) \leq 0$;

Ce qui nous intéresse le plus est la réciproque :

Théorème

- Si pour tout $x \in I$, $f'(x) \geq 0$, alors f est croissante sur I ;
- Si pour tout $x \in I$, $f'(x) \leq 0$, alors f est décroissante sur I ;
- Si pour tout $x \in I$, $f'(x) = 0$, alors f est constante sur I .

Cela donne alors un moyen de connaître les variations d'une fonction f :
Pour cela il suffit d'étudier le signe de sa dérivée f'.

⚠ Il faut donc savoir étudier un signe, ce qui dépend toujours de la forme de l'expression à étudier.

Exemple (simple)
Étudions les variations d'une fonction polynomiale de degré 2 :
Soit $f(x) = 5x^2 + 30x - 1$.
On calcule $f'(x) = 10x + 30$.
La dérivée est une fonction affine, on peut donc étudier son signe en résolvant directement :

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 10x + 30 > 0 \Leftrightarrow 10x > -30 \Leftrightarrow x > \frac{-30}{10} \Leftrightarrow x > -3$$

Par conséquent on obtient le tableau suivant (bien calculer les images par la fonction f) :

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
variations de f		↘	-46	↗	

f admet donc un minimum, -46, atteint en $x = -3$.
On peut vérifier que l'on trouve les mêmes résultats qu'avec la méthode vue en seconde.

▶ **Exercices :** 100,101,102 et mêmes questions pour les exercices 109,110,111p57

▶ **Exercices :** 116 à 120p58 (lectures graphiques, f et éventuellement f')

▶ **Exercices :** 127,128p60 (applications économiques)