Chapitre :
Dérivation

I. Nombre dérivé

Rappel Soit A et B deux points d'un repère.
Le coefficient directeur m de la droite (AB) est donné par la formule :

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

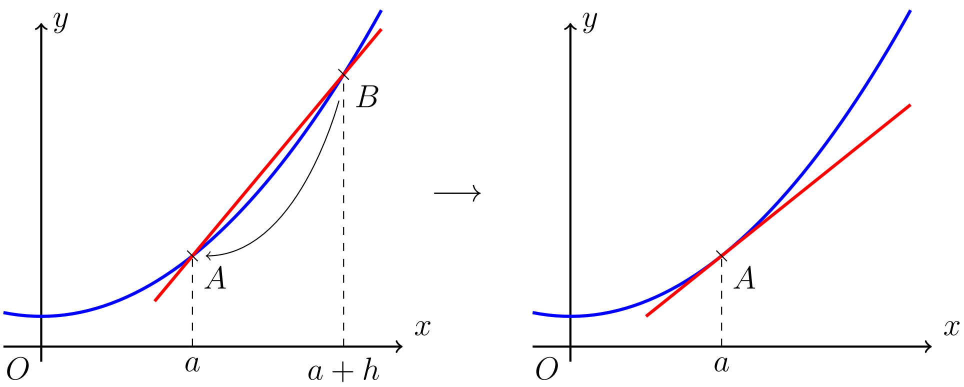
Définition Soit f une fonction définie sur un intervalle I, et soit a et b deux nombres de I, $a \neq b$.
Le **taux de variation** de la fonction f entre a et b est le quotient :

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Il s'agit du coefficient directeur de la droite sécante à la courbe représentative de f passant par les points $A(a; f(a))$ et $B(b; f(b))$ appartenant à cette courbe.
En notant $b = a + h$, on obtient la formule suivante pour le taux de variation :

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

En approchant le point B vers le point A tout en restant sur la courbe $\mathcal{C}_f$, c'est à dire en faisant approcher h de 0, la sécante s'approche d'une droite particulière, la **tangente** à $\mathcal{C}_f$ passant par le point A d'abscisse a (droite rouge dans la figure ci-dessous à droite).



Définition Le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a est appelé **nombre dérivé** de f en a. On le note $f'(a)$.
On note alors : $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

Exemple soit $f(x) = 2x^2 + 5x - 2$. et $a = 1$. Alors

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{2(1+h)^2 + 5(1+h) - 2 - (2(1)^2 + 5(1) - 2)}{h} = \frac{2h^2 + 4h + 5h}{h} = 2h + 9$$

Cette expression s'approche de 9 quand h s'approche de 0. Donc $f'(1) = 9$.

Ce genre de calcul n'est pas nécessaire (et ne sera pas demandé) grâce aux formules qui suivent.

II. Fonction dérivée

1. Définition

Définition Soit f une fonction définie sur un intervalle I qui admet un nombre dérivé en tout nombre a de I. On définit alors la fonction dérivée de f sur I, notée f', par : $f' : x \longmapsto f'(x)$.

Propriété Ci-dessous, un tableau de fonctions dont les dérivées sont à connaître :

fonction f	dérivable sur	dérivée f'
$f(x) = c$ (c constante)	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x^n$ $(n \in \mathbb{N}^\star)$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$]-\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$	$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$]0; +\infty[$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Exemples Cas particuliers les plus courants de la formule pour x^n :

- si $f(x) = x$, alors $f'(x) = 1$.
- si $f(x) = x^2$, alors $f'(x) = 2x$.
- si $f(x) = x^3$, alors $f'(x) = 3x^2$.

Remarque La fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0.

2. Règles de calcul

Propriété Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I.

- Soit k un réel (une constante), alors ku est dérivable sur I et $(ku)' = ku'$.
- $u + v$ est dérivable sur I et $(u + v)' = u' + v'$.
- uv est dérivable sur I et $(uv)' = u'v + uv'$.
- $\dfrac{u}{v}$ est dérivable en tout x de I tel que $v(x) \neq 0$ et $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.
- (cas particulier) $\dfrac{1}{v}$ est dérivable en tout x de I tel que $v(x) \neq 0$ et $\left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}$.

Les deux premiers points permettent de calculer en particulier la dérivée de n'importe quelle fonction polynomiale en utilisant les formules données dans la section précédente.

Exemple Soit $f(x) = 5x^3 + 2x^2 - 7x + 9$. La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$,
et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 5 \times (3x^2) + 2 \times (2x) - 7 \times 1 + 0 = 15x^2 + 4x - 7$.