Chapitre : Fonctions

I. Généralités

1. Intervalles

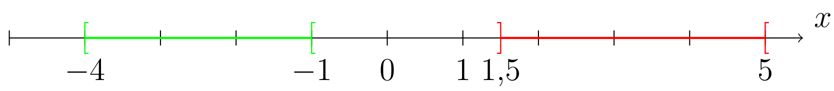
L'ensemble de tous des nombres utilisés jusqu'à présent est appelé ensemble des nombres réels.
Cet ensemble est noté $\mathbb{R}$.

Définition Un intervalle est un ensemble de nombres réels. Il y a plusieurs types d'intervalles, mais ils ont tous en commun pour leur notation deux crochets orientés à l'intérieur desquels sont données deux valeurs, appellées **bornes** de l'intervalle, séparées par un point virgule.
Soit a et b deux nombres réels.

- L'intervalle $]a;b[$ est l'ensemble de tous les nombres réels x tels que $a < x < b$ (a et b sont exclus). On dit que cet intervalle est **ouvert**.
- L'intervalle $[a;b]$ est l'ensemble de tous les nombres réels x tels que $a \leqslant x \leqslant b$ (a et b sont inclus). On dit que cet intervalle est **fermé**.
- On définit de manière similaire des intervalles comme $[a;b[$ ou $]a;b]$ (dits semi-ouverts).
- L'intervalle $]a;+\infty[$ est l'ensemble de tous les nombres x tels que $x > a$.
- L'intervalle $]-\infty;b]$ est l'ensemble de tous les nombres x tels que $x \leqslant b$.

Le sens des crochets permet de signifier que le nombre est **compris** dans l'intervalle ou **exclu** de l'intervalle.
On peut donner un nom à un intervalle sous la forme d'une lettre majuscule, comme par exemple I.
On écrit $x \in I$, et on dit que x appartient à I, si x est un nombre de l'intervalle I.
On écrit $x \notin I$, et on dit que x n'appartient pas à I, dans le cas contraire.

L'infini est toujours exclu : ce n'est pas un nombre réel, un nombre réel ne vaut jamais l'infini.



Représentation des intervalles
$[-4;-1[$ (semi-ouvert) et $]1{,}5;5[$ (ouvert).
On a $\pi \in]1{,}5;5[$ car $1{,}5 < \pi < 5$, $-4 \in [-4;-1[$ mais $-1 \notin [-4;-1[$.

Définition L'union de deux intervalles est l'ensemble des nombres qui sont au moins dans l'un des deux intervalles. On utilise le symbole $\cup$, prononcé « union », pour l'union de deux intervalles.

Exemple $[1;2[\cup]2;5]$ est l'ensemble des nombres x tels que $1 \leqslant x \leqslant 5$ et $x \neq 2$.

Ce n'est pas un intervalle !

► **Exercices :** fiche sur les intervalles

2. Vocabulaire sur les fonctions

Définition Soit $\mathcal{D}$ une partie de $\mathbb{R}$ (le plus souvent un intervalle ou une union d'intervalles). Définir une fonction f c'est associer à tout nombre x de $\mathcal{D}$ un **unique** nombre réel $f(x)$.
On dit que $\mathcal{D}$ est l'ensemble de définition de f, on le note parfois $\mathcal{D}_f$.
On dit que $f(x)$ est l'**image** de x. Pour tout x de $\mathcal{D}$, l'image de x est donc unique.

Exemple On peut définir une fonction à l'aide d'une expression littérale (qui utilise la lettre x, appelée variable). Soit par exemple f, la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$. C'est la fonction qui à tout nombre positif associe sa racine carrée.

On note $f : x \mapsto \sqrt{x}$.
L'image de 4 par la fonction f est $f(4) = \sqrt{4} = 2$.

► **Exercices :** 1,2,3,4p85, 36p87, 37p88

Définition Soit f une fonction définie sur un ensemble $\mathcal{D}$. Soit y un nombre réel. Un **antécédent** de y pour la fonction f est un nombre x tel que $f(x) = y$.

Remarque Un antécédent est un « x » (alors que l'image est un « y » ou « $f(x)$ »).

Méthode Chercher un antécédent revient à chercher un « x », et par suite à résoudre une équation.

Exemple Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$. Chercher un antécédent de 4 par f c'est chercher les nombres x tels que $f(x) = 4$. On remplace $f(x)$ par son expression, puis on résout cette équation.
On a $f(2) = 4$ et $f(-2) = 4$. Ainsi, 2 et -2 sont tous les deux des antécédents de 4.
Le nombre -4 n'a pas d'antécédent par f car pour tout nombre réel, $f(x) = x^2 \geqslant 0$.

Remarque l'image d'un nombre est unique, mais un nombre peut avoir aucun, un seul ou plusieurs antécédents.

► **Exercices :** 5,6p85, 38,39,40p88

3. Représentation graphique

⊛ **Activité :** 2p80

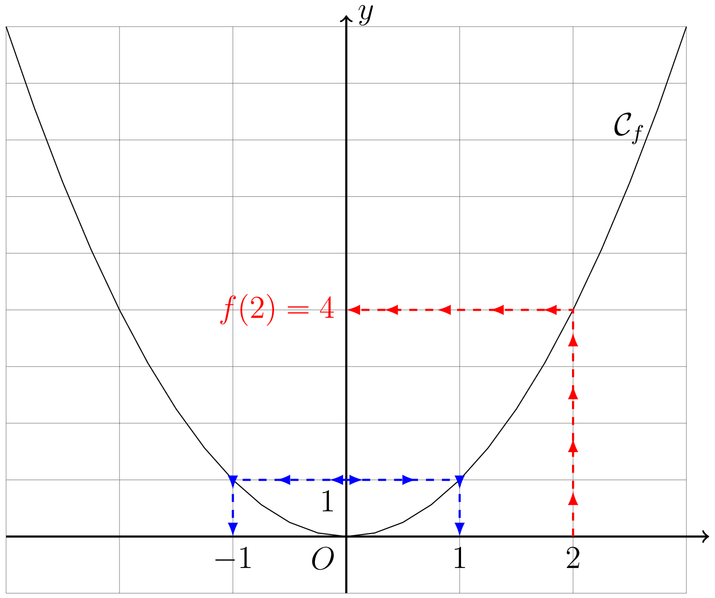
Définition Soit f une fonction définie sur un ensemble $\mathcal{D}$. La représentation graphique de f dans un repère est l'ensemble des points de coordonnées $(x; f(x))$ pour tout x de $\mathcal{D}$. On note parfois $\mathscr{C}$ ou $\mathscr{C}_f$ cette courbe. On associe cette courbe à l'équation $y = f(x)$ (y est l'ordonnée, x l'abscisse).

Pour construire une représentation graphique d'une fonction f, il faut calculer l'image $f(x)$ de plusieurs nombres x de $\mathcal{D}$.

Exemple Représentation graphique de la fonction $f : x \mapsto x^2$ sur $[-3; 3]$.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x) = x^2$	9	4	1	0	1	4	9

Exemple de calcul : $f(-3) = (-3)^2 = 9$.
Représentation et lectures graphiques :



2 a pour image 4 par f : $f(2) = 4$.
1 a pour antécédents -1 et -1 par f : $f(-1) = f(1) = 1$.

Une lecture graphique des images (et des antécédents) ne donne que des valeurs approchées.

▶ **Exercices :** 17,18,19,20p86 (tableaux)

▶ **Exercices :** 27,29,31p87, 24p86 (représentation)

▶ **Exercices :** 46,47,48,49p89 (lecture graphique)

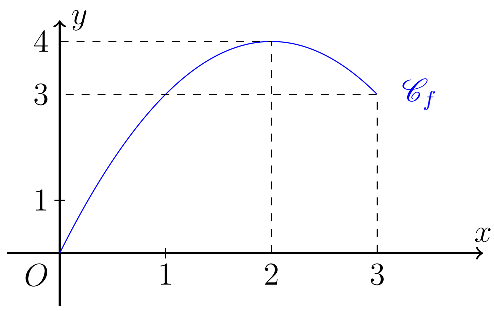
4. Variations de fonctions

⊛ **Activité :** 1p116

Définition Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
- On dit que f est croissante sur I lorsque : si x augmente, alors $f(x)$ augmente.
- On dit que f est décroissante sur I lorsque : si x augmente, alors $f(x)$ diminue.

On dit qu'une fonction est **monotone** si elle ne change pas de sens de variation sur son ensemble de définition.
On peut indiquer les intervalles sur lesquels une fonction est croissante ou décroissante à l'aide d'un tableau de variations.

x	0		2		3
variations de f			4		
	0	↗		↘	3



Définition Le **maximum** d'une fonction f est la plus grande des valeurs prises par $f(x)$.
Le **minimum** d'une fonction f est la plus petite des valeur prises par $f(x)$.
Un **extremum** est un nombre qui est soit un maximum, soit un minimum.
Lorsque la fonction change de variations, on observe des extremums **locaux**.

Exemple Dans l'exemple précédent, le minimum est 0 et le maximum est 4.

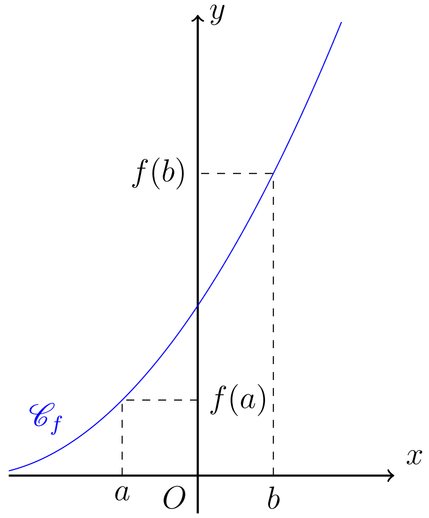
▶ **Exercices :** 4,5,6,7p121, 8,9,10,11,12p122, 14,15,16,17p123

▶ **Exercices :** 15,17,18,19p123

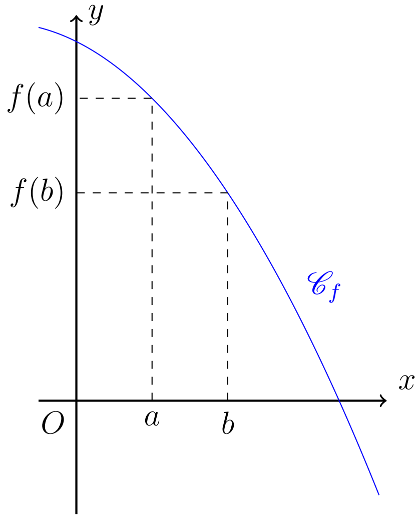
▶ **Exercices :** 20,21,22p124
Voici des définitions plus rigoureuses pour les variations et les extremums :

Définition Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
- On dit que f est croissante sur I si quels que soient a et b dans I tels que $a < b$ on a $f(a) \leq f(b)$.
- On dit que f est décroissante sur I si quels que soient a et b dans I tels que $a < b$ on a $f(a) \geq f(b)$.

Autrement dit, une fonction croissante conserve le sens de l'inégalité, alors qu'une fonction décroissante change le sens de l'inégalité.



Fonction croissante
$a < b$ et $f(a) \leqslant f(b)$



Fonction décroissante
$a < b$ et $f(a) \geqslant f(b)$

Si les inégalités entre les images de $f(a)$ et $f(b)$ sont toujours strictes, on dit que f est strictement croissante (ou décroissante).
Nous y reviendrons plus tard.

II. Fonctions affines et linéaires

1. Définitions et propriétés

Définition Une fonction affine est une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$, où a et b sont des nombres réels.

Lorsque $b = 0$, f est une fonction **linéaire** ($f(x) = ax$).
Lorsque $a = 0$, f est une fonction **constante** ($f(x) = b$).

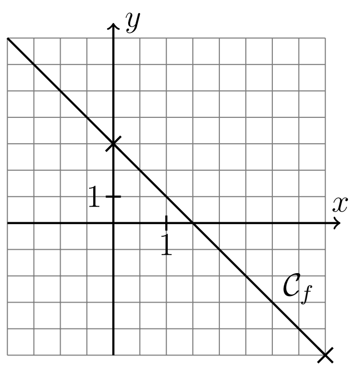
Propriété La fonction affine f est représentée par une droite.
On écrit que la droite a pour équation $y = ax + b$.

Exemple Soit $f : x \longmapsto -2x + 3$.
Pour tracer représentation graphique de f, qui est une droite puisque f est une fonction affine, il suffit de déterminer deux points de cette droite.
Pour cela, on choisit deux valeurs de x, puis on détermine les images $y = f(x)$. Par exemple :
Si $x = 0$, on a $f(0) = 3$, donc on obtient le point de coordonnées $(0; 3)$.
Si $x = 4$, on a $f(4) = -2 \times 4 + 3 = -8 + 3 = -5$, on obtient donc le point de coordonnées $(4; -5)$.
On peut également présenter les résultats sous forme d'un **tableau de valeurs** :

x	0	4
$f(x)$	3	-5

Rappel Comme $f(0) = 3$, on dit que :
- 3 est **l'image** de 0 par f (il n'y a toujours qu'une image) ;
- 0 est **un antécédent** de 3 par f (avec certaines fonctions il peut y avoir plusieurs antécédents).

On place alors les deux points dans un repère, puis la droite passant par ces deux points.



Définition Le nombre a est appelé **coefficient directeur**.
Le nombre b est l'**ordonnée à l'origine** puisque $f(0) = b$.

⚠ Le terme de « coefficient directeur » n'a de sens que pour une fonction affine (en fait plus rigoureusement pour la droite qui la représente).

Propriété Soit $f : x \longmapsto ax + b$.
- Si $a > 0$, alors f est croissante.

- Si $a < 0$, alors f est décroissante.

Exemple Soit $g : x \longmapsto \dfrac{-2x+5}{4}$.
La fonction g est affine. En effet, $g(x) = \dfrac{-2}{4}x + \dfrac{5}{4} = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{5}{4}$.
Le coefficient directeur est $a = -\dfrac{1}{2}$, donc négatif. Ainsi, g est décroissante.

▶ **Exercices :** fiche d'exercices (de 1 à 5)

2. Résolution d'(in)équations du premier degré

Rappel Résoudre une équation d'inconnue x c'est déterminer l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles l'égalité donnée par l'équation est vraie.
Pour cela on effectue des opérations sur les membres de l'équation, **toujours la même des deux côtés**.

Méthode (Opérations sur les équations) On peut faire les opérations suivantes sur les équations pour les résoudre :
- Additionner (ou soustraire) un même nombre aux deux membres de l'équation ;
- Multiplier (ou diviser) par un même nombre (non nul) les deux membres d'une équation.

Remarque Généralement, l'ensemble des solutions d'une équations est un ensemble de valeurs isolées (parfois une seule valeur) x_0, x_1.
On note ces valeurs entre accolades, comme par exemple $\mathcal{S} = \{x_0; x_1\}$.

Exemple Soit à résoudre l'équation $2x + 4 = 10$

$$\begin{aligned} 2x + 4 = 10 &\Leftrightarrow 2x = 10 - 4 \\ &\Leftrightarrow 2x = 6 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{6}{2} \\ &\Leftrightarrow x = 3 \end{aligned}$$

L'ensemble de solutions est donc $\mathcal{S} = \{3\}$.

▶ **Exercices :** 15,16p103

Méthode (Opérations sur les inéquations) Pour les inéquations on peut appliquer les mêmes opérations. Cependant, lorsque l'on **multiplie (ou divise) par un nombre négatif**, on **change le sens de l'inéquation**.

Remarque Généralement, l'ensemble des solutions d'une inéquation est un intervalle, ou une union d'intervalles.

Exemple Soit à résoudre l'équation $-2x + 10 \geqslant x - 5$.

$$
\begin{aligned}
-2x+10 \geqslant x-5 &\Leftrightarrow -3x+10 \geqslant -5 && \text{(on soustrait } x\text{)}\\
&\Leftrightarrow -3x \geqslant -5-10\\
&\Leftrightarrow -3x \geqslant -15\\
&\Leftrightarrow x \leqslant \frac{-15}{-3} && \text{(division par } -3<0\text{)}\\
&\Leftrightarrow x \leqslant 5
\end{aligned}
$$

L'ensemble des solutions est alors $\mathcal{S} =]-\infty; 5]$

▶ **Exercices :** 18,19,20p103

3. Étude de signe d'une expression affine

Méthode Pour étudier le signe d'une expression de la forme $ax+b$, on résout par exemple $ax+b \geqslant 0$. Autrement dit on cherche les valeurs de x pour lesquelles l'expression est **positive** (supérieure à 0). Ensuite on établit un tableau de signes en fonction du résultat obtenu.

Exemple On souhaite étudier le signe de $-3x+15$:

$$
\begin{aligned}
-3x+15 \geqslant 0 &\Leftrightarrow -3x \geqslant -15\\
&\Leftrightarrow x \leqslant \frac{-15}{-3} \quad \text{(⚠ division par } -3<0 \Rightarrow \text{on change de sens)}\\
&\Leftrightarrow x \leqslant 5
\end{aligned}
$$

Par conséquent $-3x+15$ est positive si et seulement si x est inférieur à 5.
Le **tableau de signes** est alors le suivant :

x	$-\infty$		5		$+\infty$
Signe de $-3x+15$		$+$	0	$-$	

▶ **Exercices :** fiche d'exercices (de 6 à 8)

★ **Approfondissement :** 46p106 (voir méthode 1p99 avant) ; fiche d'exercices (9 à 14)

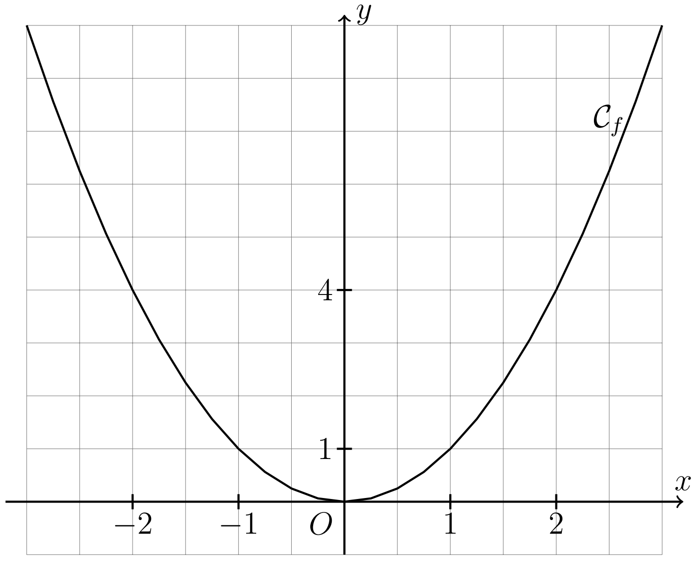
III. Fonction carré

Définition La fonction carrée est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

Propriété La fonction carrée est strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$ puis strictement croissante sur $[0; +\infty[$. Elle admet pour minimum 0 en $x = 0$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
variations de f		$\searrow$	0	$\nearrow$	

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	9	4	1	0	1	4	9



Définition On appelle **parabole** la courbe représentative de la fonction carré. Son extremum est appelé le **sommet** de la parabole.

Remarque La courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, parce que $f(-x) = f(x)$, autrement dit les points $(-x; x^2)$ et $(x; x^2)$, qui sont sur la courbe, sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

▶ **Exercice :** 24p124 (comparaison de carrés)

▶ **Exercice :** 31p125 (démonstration des variations de la fonction carré)

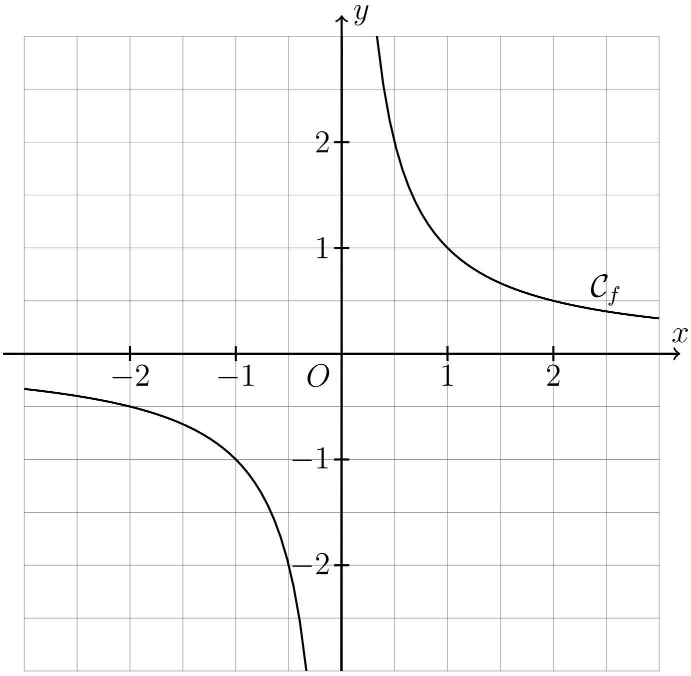
IV. Fonction inverse

Définition La fonction inverse est la fonction f définie sur $\mathbb{R}^\star =]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

Propriété La fonction inverse est décroissante sur $]-\infty;0[$ et encore décroissante sur $]0;+\infty[$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
variations de f	$\searrow$	||	$\searrow$

x	-2	-1	$-\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{2}$	1	2
$f(x)$	$-\dfrac{1}{2}$	-1	-2	2	1	$\dfrac{1}{2}$



Définition On appelle la courbe représentative de la fonction inverse une **hyperbole**.

Remarque La courbe est symétrique par rapport à l'origine du repère. En effet, $f(-x) = -f(x)$, donc les points $\left(-x;-\dfrac{1}{x}\right)$ et $\left(x;\dfrac{1}{x}\right)$ sont sur la courbe et sont symétriques par rapport à O.

▶ **Exercice :** 27,26p124 (comparaison d'inverses)

▶ **Exercice :** 32p125 (démonstration des variations de la fonction inverse)

Hors chapitre :

▶ **Exercices :** 29 à 36p104, 48p106 (résolutions graphiques d'(in)équations)

V. Fonctions polynomiales de degré 2

1. Définition, variations

⊛ **Activité :** Partie 1 de l'activité 1p152 (diverses représentations et expressions multiples)

Définition Une fonction polynomiale de degré 2 est une fonction f dont l'expression peut s'écrire sous la forme :

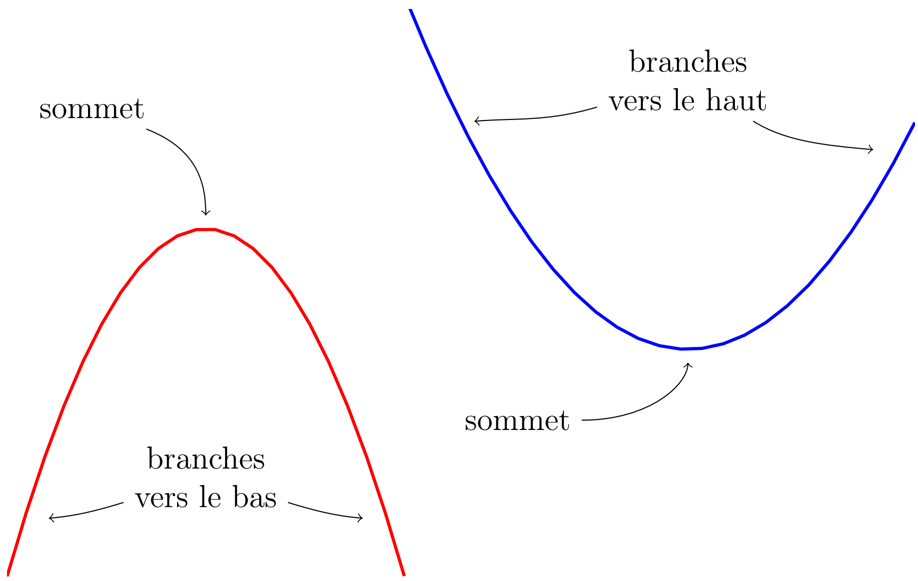
$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

où a, b et c sont des nombres fixés, a étant non nul.

Exemples

- $f(x) = -2(x+5)(x-2) = -2(x^2 - 2x + 5x - 10) = -2(x^2 + 3x - 10) = -2x^2 - 6x + 20$. Alors $a = -2$, $b = -6$ et $c = 20$.
- $g(x) = 3(x-1)^2 + 2 = 3(x^2 - 2x + 1) = 3x^2 - 6x + 3$. Alors $a = 3$, $b = -6$ et $c = 3$.
- la fonction carré est une fonction polynomiale de degré 2.

Définition De même que la fonction carré, la courbe représentative d'une fonction polynomiale de degré 2 est appelée **parabole**, formée de deux **branches** et d'un sommet.



Propriété

Le sommet de la parabole a pour abscisse $x = \dfrac{-b}{2a}$.

- Si $a > 0$, les branches de la parabole sont vers le haut.
- Si $a < 0$, les branches de la parabole sont vers le bas.

Démonstration : Ceci est admis et ne sera démontré qu'en première.

Exemple

- On peut établir le tableau de variations de f :
  Le sommet a pour abscisse $x = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-6}{2 \times (-2)} = \dfrac{6}{-4} = -\dfrac{3}{2}$.
  $a = -2 < 0$ donc les branches sont dirigées vers le bas.

Ainsi :

x	$-\infty$		$-\dfrac{3}{2}$		$+\infty$
variations de f		$\nearrow$	$\dfrac{49}{2}$	$\searrow$	

Calcul de l'ordonnée du sommet (utiliser l'expression de f qui paraît la mieux adaptée) :
$f\left(-\dfrac{3}{2}\right) = -2\left(-\dfrac{3}{2}+5\right)\left(-\dfrac{3}{2}-2\right) = -2 \times \left(\dfrac{7}{2}\right) \times \left(-\dfrac{7}{2}\right) = \dfrac{49}{2}$.

- De même pour g :

  Le sommet a pour abscisse $x = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-6}{2 \times 3} = \dfrac{6}{6} = 1$.

  $a = 3 > 0$ donc les branches sont dirigées vers le haut.

  Ainsi :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
variations de g		$\searrow$	2	$\nearrow$	

Calcul de l'ordonnée du sommet : $g(1) = 3(1-1)^2 + 2 = 2$ (utiliser la forme la plus adaptée).

On peut observer une symétrie de la courbe par rapport à la droite parallèle à l'axe des ordonnées passant par le sommet, autrement dit la droite d'équation $x = \dfrac{-b}{2a}$.

▶ **Exercices :** 17p156, fiche d'exercices

2. Problèmes du second degré

a. Signe d'un produit

Méthode

- Pour étudier le signe d'un produit, on étudie le signe de chacun des facteurs.
- Pour étudier le signe d'une expression affine, on peut résoudre une inéquation

Exemple Étudions le signe de $(x-3)(-2x+4)$ sur $\mathbb{R}$.

On résout : $x - 3 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 3$ et $-2x + 4 \geqslant 0 \Leftrightarrow -2x \geqslant -4 \Leftrightarrow x \leqslant \dfrac{-4}{-2}$ $(-2 < 0)$ $\Leftrightarrow x \leqslant 2$.

Par suite :

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
signe de $x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
signe de $-2x+4$		$+$	0	$-$		$-$	
signe de $(x-3)(-2x+4)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On peut alors résoudre des inéquations comme : $(x-3)(-2x+4) \geqslant 0$.
D'après le tableau de signes, on peut affirmer que $\mathcal{S} = [2;3]$.

▶ **Exercices :** 35,38p142 et questions 78 à 82 du QCM page 147