

# Chapitre :

# Vecteurs



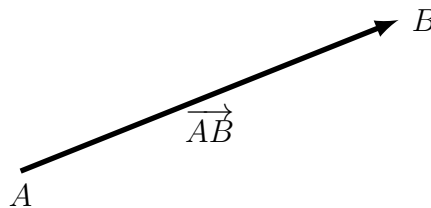
⊗ **Activité** : fiche d'activité sur les vecteurs

## I. Définitions

---

**Définition** Soit  $A$  et  $B$  deux points du plan. La notation  $\overrightarrow{AB}$  se dit « vecteur  $AB$  ». Il est représenté par une flèche. On dit que  $A$  est l'origine et que  $B$  est l'extrémité. Un vecteur est caractérisé par trois choses :

- Sa direction, c'est à dire celle de la droite  $(AB)$  ;
- Son sens, celui de  $A$  vers  $B$  ;
- Sa longueur, celle de  $[AB]$ , à savoir  $AB$ .



**Définition** Si  $A = B$ , alors  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AA}$ . Ce vecteur particulier est appelé vecteur nul ; on le note  $\vec{0}$ .

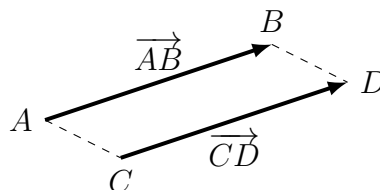
**Définition** On dit que  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{CD}$  sont égaux si les trois propriétés suivantes sont satisfaites :


- les directions sont les mêmes, c'est à dire  $(AB) \parallel (CD)$  ;
- les sens sont les mêmes (le sens de  $A$  vers  $B$  est le même que le sens de  $C$  vers  $D$ ) ;
- les longueurs sont les mêmes, c'est à dire  $AB = CD$

De manière équivalente :

**Propriété** | (Règle du parallélogramme 1)

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$  si et seulement si  $ABDC$  est un parallélogramme.

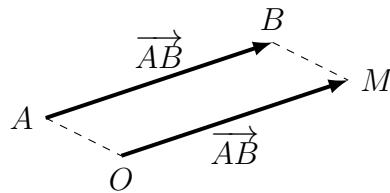


 L'ordre des points est très important !

**Remarque** Quand on a un parallélogramme, on peut alors en déduire plusieurs égalités de vecteurs. Dans le cas de  $ABDC$ , comme sur la figure ci-dessus, on a en particulier aussi  $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$ .

**Propriété** | Soit  $\overrightarrow{AB}$  un vecteur et  $O$  un point. Il existe **un unique** point  $M$  tel que  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OM}$ .

C'est le point  $M$  tel que  $ABMO$  est un parallélogramme :



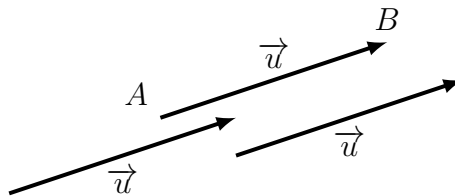
On peut dire aussi que  $M$  est l'image de  $O$  par la translation de vecteur  $\overrightarrow{AB}$ .

**Remarque** Il est important de noter que si  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ , l'objet  $\overrightarrow{AB}$  est le même objet que  $\overrightarrow{CD}$ , bien que les points  $A$  et  $B$  ne soient pas les points  $C$  et  $D$ .

On peut nommer un vecteur par une seule lettre (minuscule) surmontée d'une flèche.

Par exemple  $\vec{v}$ ,  $\vec{u}$ .

On peut alors représenter un vecteur à plusieurs endroits du plan, il s'agit toujours du même objet.



**Définition** Le vecteur  $\overrightarrow{BA}$  est appelé vecteur opposé du vecteur  $\overrightarrow{AB}$ .

On le note aussi  $-\overrightarrow{AB}$ .

Il est de même direction et de même longueur que le vecteur  $\overrightarrow{AB}$ , mais de sens contraire.

► **Exercices** : 1,2p209 ,11,12,15,17,18,19p210

## II. Somme de vecteurs

---

⊗ **Activité** : 2p200 (translations enchaînées)

Pour faire la somme de deux vecteurs, on représente ces deux vecteurs de manière que l'origine de l'un soit l'extrémité de l'autre. La somme est alors le vecteur dont l'origine est l'origine du premier et l'extrémité est l'extrémité du second.

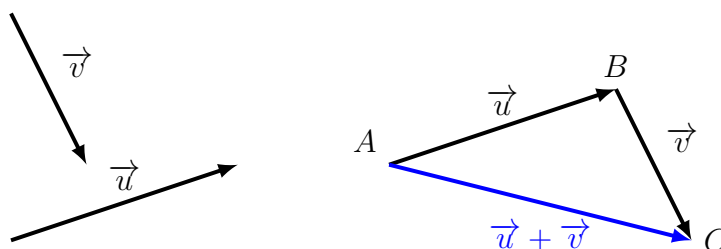
**Méthode** Pour faire la somme de  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  :

On choisit un point  $A$ .

On construit le point  $B$  tel que  $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ .

On construit ensuite le point  $C$  tel que  $\overrightarrow{BC} = \vec{v}$ .

Alors  $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ .



**Propriété** (Relation de Chasles) Soit  $A$ ,  $B$  et  $C$  trois points du plan. Alors :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

c'est la **relation de Chasles**.

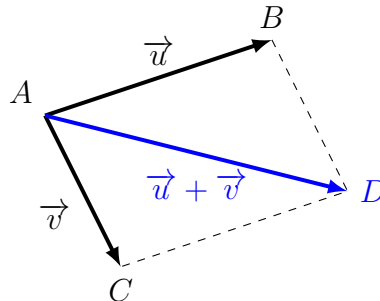
**!** Bien faire attention à avoir le même point entourant un signe + pour appliquer cette relation. Ça ne fonctionne en particulier pas avec un signe -.

Parfois, on souhaite faire la somme de deux vecteurs qui ont la même origine, c'est à dire  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ . Il s'agit alors d'une autre propriété :

**Propriété** (règle du parallélogramme 2) Pour tous points  $A$ ,  $B$  et  $C$  du plan,

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$$

où  $D$  est le point tel que  $ABDC$  est un parallélogramme.



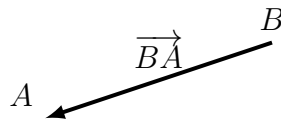
**Démonstration** : Comme  $ABDC$  est un parallélogramme, on a  $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$  d'après la règle du parallélogramme 1, et donc, en utilisant la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$$

**Remarque** Quelque soit  $A$  et  $B$ ,  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$ .

Cela explique pourquoi  $\overrightarrow{BA}$  est l'opposé de  $\overrightarrow{AB}$ .

On note  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AB} + (-\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB} = \vec{0}$ .



**Remarque** Avec la règle du parallélogramme 2, on peut remarquer que l'on a :

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$$

► **Exercices** : 21,22,23,24p211 (constructions de sommes)

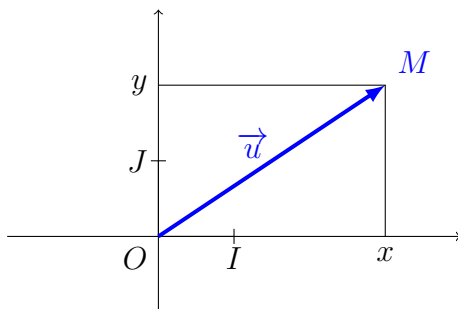
► **Exercices** : 25,26,27,28p211 (Chasles)

# III. Coordonnées

---

**Définition** Dans un repère  $(O; I; J)$ , les coordonnées d'un vecteur  $\vec{u}$  sont celles du point  $M$  tel que  $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$ .

On peut noter  $\overrightarrow{OM}(x; y)$  ou  $\overrightarrow{OM} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ .



**Exemple** le vecteur nul  $\vec{0}$  a pour coordonnées  $(0; 0)$ .

On note  $\vec{u}(x; y)$  pour désigner le vecteur  $\vec{u}$  de coordonnées  $(x; y)$ . On peut aussi noter :

$$\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

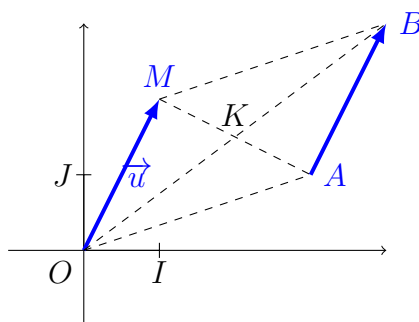
**Propriété** Les vecteurs  $\vec{u}(x; y)$  et  $\vec{v}(x'; y')$  sont égaux si et seulement si

$$x = x' \text{ et } y = y'$$

**Théorème** Soit  $A(x_A; y_A)$  et  $B(x_B; y_B)$  deux points dans le repère  $(O; I; J)$ . Alors :

$$\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A)$$

**Démonstration** : Soit  $M$  tel que  $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$ . Les coordonnées de  $M$  sont celles de  $\overrightarrow{AB}$  par définition. De plus,  $OMBA$  est un parallélogramme. Donc  $[AM]$  et  $[OB]$  ont le même milieu  $K$ .

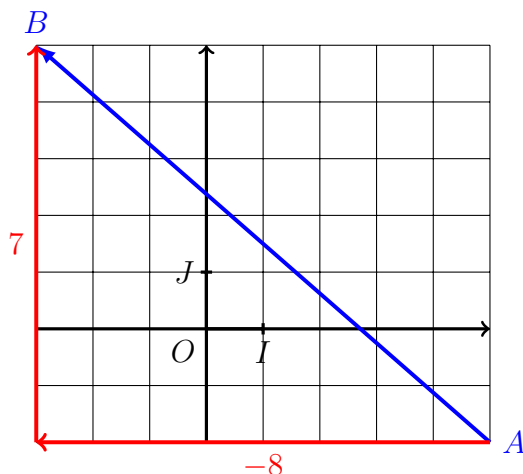


$$\text{Donc } x_K = \frac{x_M + x_A}{2} = \frac{x_B + x_O}{2} \Leftrightarrow x_M + x_A = x_B \Leftrightarrow x_M = x_B - x_A.$$

On fait de même avec les ordonnées.

**Exemple** Si  $A(5; -2)$  et  $B(-3; 5)$ , alors  $\overrightarrow{AB}(-3 - 5; 5 - (-2))$ , soit  $\overrightarrow{AB}(-8; 7)$ .

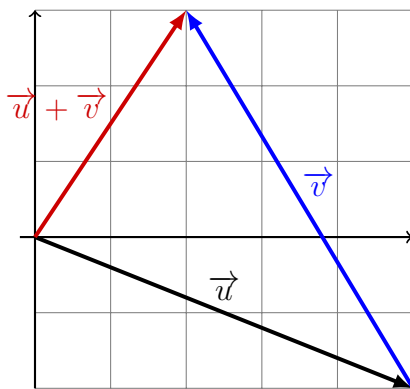
**Remarque** On peut « lire » les coordonnées des vecteurs sur un repère, en les comprenant comme le déplacement à faire pour aller de l'origine à l'extrémité, selon l'axe des abscisses puis selon celui des ordonnées.



- Exercices : 5,6p209, 38,39p213 (lecture de coordonnées)
- Exercices : 4p209, 43,45,47p213 (calcul de coordonnées)
- Exercices : 7,8p209, 48p213 (détermination de coordonnées de points)

**Théorème** Soit  $\vec{u}(x; y)$  et  $\vec{v}(x'; y')$ . Alors  $\vec{u} + \vec{v}$  a pour coordonnées  $(x + x'; y + y')$ .

**Exemple** Soit  $\vec{u}(5; -2)$  et  $\vec{v}(-3; 5)$ , et  $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$ . Alors  $\vec{w}(2; 3)$ .



**Remarque** On a  $-\vec{u}(-x; -y)$  (car  $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$ )

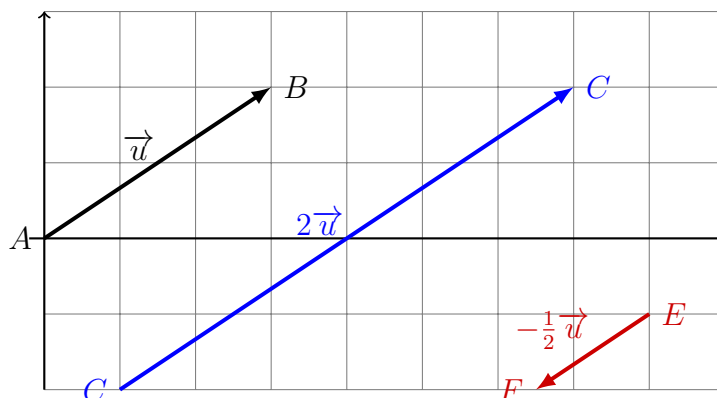
- Exercices : 9p209, 50p214, 56,58,60p215

# IV. Produit par un nombre réel ; colinéarité

---

**Définition** Soit  $\vec{u}$  un vecteur de coordonnées  $(x; y)$  et  $k$  un réel.  
On note  $k\vec{u}$  le vecteur de coordonnées  $(kx; ky)$ .

**Exemple** Soit  $\vec{v}(3; 2)$ . Alors  $2\vec{v}(2 \times 3; 2 \times 2)$ , soit  $2\vec{v}(6; 4)$ . De même,  $-\frac{1}{2}\vec{v}\left(-\frac{3}{2}; 1\right)$ .



**Graphiquement**, Soit  $\vec{AB}$  un vecteur non nul,  $k$  un réel non nul.  
Notons  $\vec{CD} = k\vec{AB}$ . Alors  $(CD)$  et  $(AB)$  sont parallèles et :

- Si  $k > 0$ , alors  $\vec{CD}$  et  $\vec{AB}$  sont de même sens et  $CD = kAB$
- Si  $k < 0$ , alors  $\vec{CD}$  et  $\vec{AB}$  sont de sens contraire et  $CD = -kAB$

► **Exercices** : 61,62,63,64,65,66p215, 70,72p216

**Définition** On dit que deux vecteurs sont colinéaires s'ils ont la même direction, autrement dit si les droites qu'ils portent sont parallèles.

Nous avons vu que si  $\vec{CD} = k\vec{AB}$ , alors  $\vec{CD}$  et  $\vec{AB}$  ont la même direction, donc ils sont colinéaires.  
Nous admettrons la réciproque, c'est à dire le théorème suivant :

**Théorème** |  $\vec{AB}$  et  $\vec{CD}$  sont colinéaires si et seulement si il existe un réel  $k$  tel que

$$\vec{CD} = k\vec{AB}$$

**Exemple** Exercice 74p216 (1 et 2)

**Remarque** On peut démontrer que deux droites sont parallèles en démontrant que deux vecteurs sont colinéaires.

Autre conséquence importante :

**Propriété** | Soit  $A, B$  et  $C$  trois points du plan.

$A, B$  et  $C$  sont alignés si et seulement si il existe un réel  $k$  tel que  $\vec{AC} = k\vec{AB}$ .

► **Exercices** : 75,76,78,79p216

**Propriété** | Soit  $\vec{u}(x; y)$  et  $\vec{v}(x'; y')$ .  
 $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires si et seulement si  $xy' - yx' = 0$ .

**Démonstration** : Cela vient du fait que les coordonnées sont colinéaires. En effet, il existe  $k$  tel que  $\vec{v} = k\vec{u}$ , autrement dit

$$x' = kx \text{ et } y' = ky$$

Donc (dans le cas où  $x$  et  $y$  ne sont pas nuls)  $k = \frac{x'}{x} = \frac{y'}{y}$ , et par produit en croix :

$$x'y = xy' \Leftrightarrow xy' - yx' = 0$$

Si jamais  $y = 0$  (resp.  $x = 0$ ), alors  $y' = 0$  (resp.  $x' = 0$ ) et donc  $xy' - yx'$  vaut bien 0.

**Exemple** À nouveau exercice 74p216