Chapitre :
Probabilités

∽

⊛ **Activité :** exercice 1 de la fiche

I. Généralités

Définition Une expérience aléatoire est un processus qui peut être répété, dont le résultat n'est pas connu à l'avance, mais dont l'ensemble des résultats possibles est connu.
l'ensemble de résultats possibles, appelé **univers**, est parfois noté E ou Ω. On appelle **issue** un résultat possible.

Exemple On lance un dé et on regarde le résultat. L'univers est l'ensemble $\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

Exemple On lance deux dés et on fait la somme. L'univers est l'ensemble $\{2; 3; \dots; 12\}$.

Définition On appelle événement tout sous-ensemble (partie) de l'univers E. Un **événement élémentaire** est un événement composé d'une seule issue. On peut décrire un événement à l'aide d'une phrase.

Exemple Dans l'expérience aléatoire du jet d'un dé, on peut considérer :
- l'événement « obtenir un 2 ». Il correspond à l'ensemble $\{2\}$.
- l'événement « obtenir un nombre pair ». Il correspond à l'ensemble $A = \{2; 4; 6\}$.

Définition Soit A un événement.
L'événement contraire de A, noté $\overline{A}$ et lu « non A » (ou « A barre ») est l'ensemble des issues de E qui ne sont pas dans A.

Exemple L'événement contraire de « obtenir un 2 » est « ne pas obtenir de 2 ».
Il correspond à l'ensemble $\{1; 3; 4; 5; 6\}$.
L'événement contraire de « obtenir un nombre pair » est « obtenir un nombre impair ».
Il correspond à l'ensemble $\overline{A} = \{1; 3; 5\}$.

Définition On dit de deux événements qu'ils sont **incompatibles** s'ils n'ont pas d'issue en commun.
Deux événements contraires sont donc en particulier incompatibles.

Exemple Les événements « obtenir un 2 » et « obtenir un nombre impair » sont incompatibles.

► **Exercices :** 2 et 3 de la fiche

II. Loi de probabilité

⊛ **Activité :** lire la page 53 (passage des fréquences à la probabilité)

Sur l'ensemble $E = \{e_1; \ldots; e_n\}$, univers de l'expérience aléatoire, on veut pouvoir exprimer la fréquence d'apparition théorique de chaque issue.
On définit alors sur E une fonction de probabilité, notée P, de sorte que :
Pour tout élément e_i de E, $P(e_i) \geq 0$ et la somme des $P(e_i)$ vaut 1 :

$$P(e_1) + \cdots + P(e_n) = 1$$

Déterminer la fonction P, c'est donner la **loi de probabilité** sur E. Elle est souvent donnée sous forme de tableau, associant à chaque issue sa probabilité.

Définition La probabilité d'un événement A de E est la somme des probabilités des issues de A.

Exemple La probabilité d'obtenir un nombre pair avec un jet de dé à six faces est :

$$P(\text{« obtenir un nombre pair »}) = P(2) + P(4) + P(6)$$

Propriété Soit A un événement de E. Alors :

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1$$

▶ **Exercices :** 4 et 5 de la fiche

Cas particulier : équiprobabilité

Dans certains cas, on estime que les probabilités de toutes les issues sont les mêmes. On dit que les issues sont **équiprobables**. C'est le cas lorsque l'on considère que le dé est « **équilibré** », ou bien que l'on tire (une carte, une boule dans une urne) « **au hasard** ».
On dit alors que la loi est **équirépartie**.
Si l'univers E contient n éléments, on a toute issue e a la probabilité $P(e) = \dfrac{1}{n}$.

Exemple pour revenir à l'exemple précédent, si le dé est équilibré, la loi est équirépartie. Donc :

$$P(\text{« obtenir un nombre pair »}) = P(2) + P(4) + P(6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

Propriété On peut simplifier le calcul des probabilités dans le cas d'équiprobabilité. Soit A un événement de E dont la loi est équirépartie. Alors :

$$P(A) = \frac{\text{nombre d'éléments de } A}{\text{nombre d'éléments de } E}$$

Exemple Dans notre exemple, l'événement « obtenir un nombre pair » représente l'ensemble $\{2; 4; 6\}$ qui contient 3 éléments. L'ensemble E contient lui 6 éléments.
On a donc $P(A) = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$.

▶ **Exercices :** 6 et 7 de la fiche

Pour les expériences qui consistent à obtenir successivement plusieurs éléments (tirer au hasard plusieurs cartes, lancer plusieurs fois un dé, etc.), on peut utiliser un arbre des possibilités pour visualiser et compter les issues possibles, qui sont alors des listes d'issues.

Exemple On lance une pièce deux fois.

▶ **Exercices :** 32,33,35, 34 p57

Pour les expériences où l'on fait un tirage (choisir une carte, prendre une boule dans une urne, etc.), on distingue :

- le tirage **sans remise**, où l'on ne remet pas l'élément qui a été tiré ;
- le tirage **avec remise**, où l'on remet l'élément qui a été tiré.

▶ **Exercices :** 38,39p57

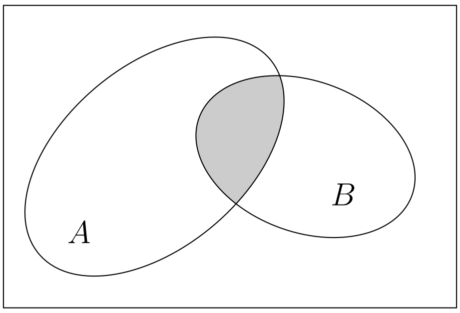
III. Lien entre union et intersection

⊛ **Activité :** chercher une formule liant $A \cup B$ avec A et B entre autres.

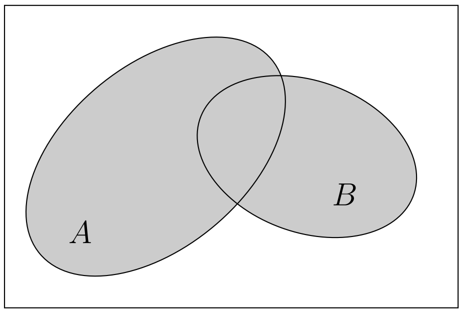
Définition Soit A et B deux événements. On définit les événements :

- « A et B », noté $A \cap B$ et prononcé aussi A inter(section) B, l'événement contenant les issues qui sont à la fois dans A et dans B.
- « A ou B », noté $A \cup B$ et prononcé aussi A union B, l'événement contenant les issues qui sont dans A ou dans B (éventuellement les deux).

Illustration : à l'aide d'un diagramme (dit de Venn), on peut visualiser ces deux événements.



$A \cap B$

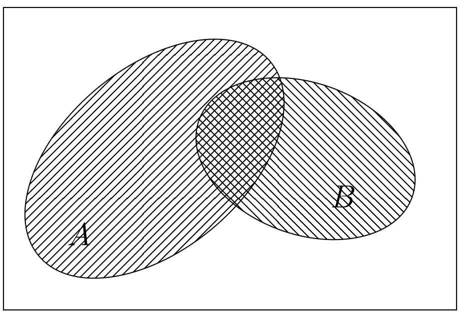


$A \cup B$

Propriété Quels que soient les événements A et B, on a :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Démonstration : Un dessin suffit à comprendre cette formule : en ajoutant $P(A)$ et $P(B)$, on compte deux fois $P(A \cap B)$, il faut donc la soustraire une fois.



▶ **Exercices :**