Rappels sur la loi binomiale

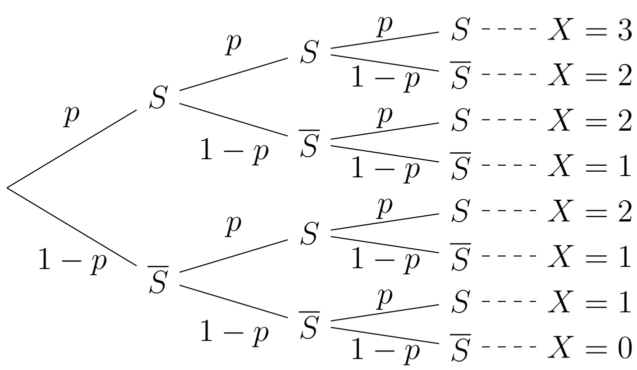
Définition On appelle **épreuve de Bernoulli** une expérience aléatoire présentant deux issues, l'une S appelée succès et l'autre $\overline{S}$ appelée échec. On note p la probabilité du succès, puis $q = 1-p$ la probabilité de l'échec. La variable aléatoire X qui prend la valeur 1 en cas de succès et 0 en cas d'échec est appelée variable aléatoire de Bernoulli.
La loi de probabilité, appelée **loi de Bernoulli de paramètre *p*** est alors donnée par :

x_i	0	1
$P(X = x_i)$	$1-p$	p

Propriété Si la variable aléatoire X suit une loi de Bernoulli de paramètre p, alors $E(X) = p$.

Définition L'expérience aléatoire consistant à répéter n fois ($n \in \mathbb{N}^\star$) de manière indépendante une épreuve de Bernoulli de paramètre p est un **schéma de Bernoulli de paramètres *n* et *p***.
On considère la variable aléatoire X égale au nombre de succès obtenus au cours des n épreuves.
On appelle alors **loi binomiale de paramètres *n* et *p*** la loi de probabilité de X.
On la note $\mathcal{B}(n,p)$, et on peut écrire $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ pour dire : X suit la loi $\mathcal{B}(n,p)$.

Exemple Dans le cas où $n = 3$ on peut représenter l'expérience par cet arbre pondéré :



Remarque Le nombre X de succès est toujours un nombre compris entre 0 et n.

Propriété L'espérance mathématique d'une variable X qui suit la loi $\mathcal{B}(n;p)$ est $E(X) = np$.

Méthode La calculatrice peut donner les valeurs des probabilités suivantes :

- $\mathbb{P}(X = k)$

en Casio : BinominalPD(k,n,p)
en TI : binomFdp(n,p,k)

- $\mathbb{P}(X \leqslant k)$:

en Casio : BinominalCD(k,n,p)
en TI : binomFRép(n,p,k)

Pour les obtenir :

en Casio : OPTN → STATS → DIST → BINM

en TI : 2nd → DISTR

Exercices

Exercice 1

X suit une loi binomiale de paramètres $n = 40$ et $p = 0{,}35$. Calculer les probabilités suivantes :

1. $\mathbb{P}(X = 3)$
2. $\mathbb{P}(X \leqslant 20)$
3. $\mathbb{P}(X < 17)$
4. $\mathbb{P}(X > 15)$
5. $\mathbb{P}(10 \leqslant X \leqslant 35)$
6. $\mathbb{P}(6 < X < 24)$

Exercice 2

Une grande enseigne de cosmétiques lance une nouvelle crème hydratante. On considère que le travail sur la viscosité de la crème a permis de réduire à 0,06 la probabilité d'avoir un pot de crème non conforme en fin de fabrication. Une boutique commande 50 pots de cette nouvelle crème à cette entreprise. On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de pots non conformes parmi les 50 pots reçus.

1. Montrer que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Calculer la probabilité que la boutique ne reçoive aucun pot non conforme.
3. Calculer la probabilité que la boutique reçoive exactement deux pots non conformes.

Exercice 3

Dans un cabinet d'assurances, on estime à 0,22 la probabilité qu'un client ait un sinistre dans l'année. On choisit au hasard et de manière indépendante 18 clients de cet assureur. X est la variable aléatoire qui donne le nombre de clients sinistrés dans l'année.

1. Préciser la loi de probabilité suivie par X.
2. Calculer $\mathbb{P}(X = 3)$ et $\mathbb{P}(X \geqslant 1)$. Interpréter.
3. Calculer $\mathbb{P}(X \geqslant 3)$.
4. Calculer $E(X)$ et interpréter cette valeur.

Exercice 4

Une entreprise fabrique des téléphones portables. Un test de performance est appliqué à ces téléphones, il est positif dans 96% des cas. Un téléphone dont le test est positif est vendu 500€. Mais si le test est négatif, il est soldé au prix de 300€. On prélève au hasard 400 téléphones dans la production. Le volume de la production permet d'assimiler ces prélèvements à des tirages avec remise. X est la variable aléatoire qui donne le nombre de téléphones conformes parmi les 400.

1. Préciser la loi de probabilité suivie par X.
2. Calculer l'espérance de X. Interpréter.
3. En déduire la recette moyenne réalisée sur la vente des 400 téléphones.

Correction des exercices

Exercice 1

1. $\mathbb{P}(X = 3) \simeq 0{,}0000507$
2. $\mathbb{P}(X \leqslant 20) \simeq 0{,}9827$
3. $\mathbb{P}(X < 17) = \mathbb{P}(X \leqslant 16) \simeq 0{,}7978$
4. $\mathbb{P}(X > 15) = 1 - \mathbb{P}(X \leqslant 15) \simeq 0{,}3054$
5. $\mathbb{P}(10 \leqslant X \leqslant 35) = \mathbb{P}(X \leqslant 35) - \mathbb{P}(X \leqslant 9) \simeq 0{,}9356$
6. $\mathbb{P}(6 < X < 24) = \mathbb{P}(X \leqslant 23) - \mathbb{P}(X \leqslant 6) \simeq 0{,}9946$

Exercice 2

1. Épreuve de Bernoulli : On choisit un pot de crème.
   Succès S : « Il est conforme ». $p = \mathbb{P}(S) = 0{,}06$.
   On répète cette expérience $n = 50$ fois de façon identique et indépendante.
   X est le nombre de succès, donc suit la loi binomiale de paramètre $n = 50$ et $p = 0{,}06$.
2. $\mathbb{P}(X = 0) \simeq 0{,}0453$.
3. $\mathbb{P}(X = 2) \simeq 0{,}2262$.

Exercice 3

1. Épreuve de Bernoulli : On choisit un client.
   Succès S : « Le client a eu un sinistre ». $p = \mathbb{P}(S) = 0{,}22$.
   On répète cette expérience $n = 18$ fois de façon identique et indépendante.
   X est le nombre de succès, donc suit la loi binomiale de paramètre $n = 18$ et $p = 0{,}22$.
2. $\mathbb{P}(X = 3) \simeq 0{,}2091$. La probabilité d'obtenir 3 clients ayant un sinistre est de 0,2091.
   $\mathbb{P}(X \geqslant 1) = 1 - \mathbb{P}(X < 1) = 1 - \mathbb{P}(X = 0) \simeq 0{,}9886$.
   La probabilité d'obtenir au moins un client ayant un sinistre est de 0,9886.
3. $\mathbb{P}(X \geqslant 3) = 1 - \mathbb{P}(X < 3) = 1 - \mathbb{P}(X \leqslant 2) \simeq 0{,}7916$.
4. $E(X) = np = 18 \times 0{,}22 \simeq 4$.
   En moyenne sur 18 clients interrogés, 4 ont eu un sinistre.

Exercice 4

1. Épreuve de Bernoulli : On choisit un téléphone.
   Succès S : « il est conforme ». $p = \mathbb{P}(S) = 0{,}96$.
   On répète cette expérience $n = 400$ fois de façon identique et indépendante.
   X suit la loi binomiale de paramètres $n = 400$ et $p = 0{,}96$.
2. $E(X) = 400 \times 0{,}96 = 384$. En moyenne sur 400 téléphones, 384 sont conformes.
3. La recette moyenne réalisée sur la vente des 400 téléphones est de :
   $R = 384 \times 500 + (400 - 384)300 = 196\ 800$€.