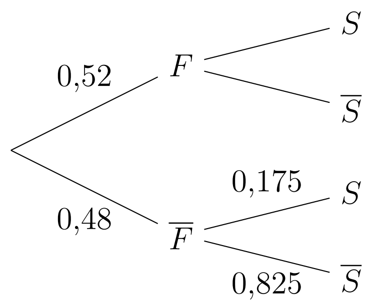
LYCÉE MARIE CURIE **TES**
2019–2020

Devoir de bac blanc – mathématiques
Correction

Exercice 1

Partie A

1. $p(S) = 0{,}18$ car 18 % des demandeurs d'emploi sont sans expérience.
   $p_{\overline{F}}(S) = 0{,}175$ car parmi les hommes demandeurs d'emploi, on sait que 17,5 % sont sans expérience.
2. Voici l'arbre complété :



3. $p\left(\overline{F} \cap S\right) = p\left(\overline{F}\right) \times p_{\overline{F}}(S) = 0{,}48 \times 0{,}175 = 0{,}084$.
   Il s'agit de la probabilité que la fiche prélevée au hasard concerne un homme sans expérience.
4. On cherche $p_S\left(\overline{F}\right)$:
   $p_S\left(\overline{F}\right) = \dfrac{p\left(\overline{F} \cap S\right)}{p\left(p(S)\right)} = \dfrac{0{,}084}{0{,}18} = \dfrac{7}{15} \simeq 0{,}467$.
5. On cherche $p_F\left(S\right)$:
   F et $\overline{F}$ forment une partition de l'univers donc $p(S) = p\left(F \cap S\right) + p\left(\overline{F} \cap S\right)$ d'après les probabilités totales.
   D'où $p\left(F \cap S\right) = 0{,}18 - 0{,}084 = 0{,}096$ soit $p_F\left(S\right) \times p(F) = 0{,}096$.
   Finalement $p_F\left(S\right) = \dfrac{0{,}096}{0{,}52} \simeq 0{,}185$.

Partie B

On répète $n = 5$ fois de manière indépendante une expérience n'ayant que deux issues dont la probabilité de succès est $p = p(S) = 0{,}18$.
Soit X la variable aléatoire comptant le nombre de succès parmi ces 5 expériences alors X suit la loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0{,}18$.
On cherche $p(X \geqslant 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - 0{,}82^5 \simeq 0{,}629$.

Exercice 2

1. $\dfrac{14{,}7 - 15}{15} \times 100 = -2$.
   Entre 2014 et 2015, l'entreprise a diminué ses rejets de 2%.
2. On considère que la baisse annuelle est constante à 2% ce qui correspond à un coefficient multiplicateur de 0,98.
   Soit R_n la quantité de rejet de CO_2 en milliers de tonnes à l'année $2014 + n$.
   On sait que (R_n) est géométrique de raison $q = 0{,}98$ et de 1er terme $R_0 = 15$.
   Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $R_n = R_0 \times q^n = 15 \times 0{,}98^n$.
   On cherche n tel que $R_n \leqslant 12$.

En calculant les valeurs de R_n à l'aide d'une calculatrice, on touve que l'inégalité est vérifiée à partir de $n = 12$.

On conclut qu'à ce rythme, l'objectif fixé sera atteint à partir de $2014 + 12 = 2026$.

Exercice 3

1. D'après le tableau de variations de f', cette dérivée s'annule sur l'intervalle $[0;5]$ et sur l'intervalle $[5;15]$. Il existe donc $a \in [0;5[$ tel que $f'(a) = 0$ et $b \in]5;15]$ tel que $f'(b) = 0$. En ces deux points distincts le nombre dérivé est nul ce qui signifie que les tangentes à la courbe $\mathcal{C}_f$ sont horizontales : l'affirmation est fausse.
2. Pour pouvoir répondre on doit d'abord déterminer l'équation de la tangente au point d'abscisse 1.

   Pour cela, on calcule tout d'abord : $g'(x) = -6x^2 + 8x + 5$.

   L'équation est $y = g'(1)(x-1)+g(1)$. Or, $g'(1)(x-1)+g(1) = 7(x-1)+7 = 7x-7+7 = 7x$.

   Donc l'équation est $y = 7x$. Or, les coordonnées de l'origine $O(0{,}0)$ satisfont cette équation, donc la tangente passe par l'origine du repère : l'affirmation est vraie.

Exercice 4

Partie A

1. On a :

   $C'(x) = \dfrac{0{,}1\mathrm{e}^{0{,}1x} \times x - (\mathrm{e}^{0{,}1x} + 20) \times 1}{x^2} = \dfrac{0{,}1x\mathrm{e}^{0{,}1x} - \mathrm{e}^{0{,}1x} - 20}{x^2}$
2. (a) On a $f'(x) = 0{,}1\mathrm{e}^{0{,}1x} + 0{,}1x \times 0{,}1\mathrm{e}^{0{,}1x} - 0{,}1\mathrm{e}^{0{,}1x} = 0{,}01x\mathrm{e}^{0{,}1x}$.

   Comme $x \in [5;60]$ et qu'une exponentielle est toujours positive, $f'(x) > 0$ pour tout $x \in [5;60]$ et par suite, f est croissante.

   (b) Comme f est continue, strictement croissante, que $f(5) \simeq -20{,}82$, $f(60) \simeq 1\,997{,}1$ et $0 \in [f(5); f(60)]$; d'après le théorème des valeurs intermédiaires et la stricte croissance, l'équation $f(x) = 0$ aura une unique solution α sur $[5;60]$.

   (c) En utilisant la calculatrice, comme $f(25) \simeq -1{,}726$ et $f(26) \simeq 1{,}5419$, on a l'encadrement suivant : $25 \leqslant \alpha \leqslant 26$.

   (d) f étant strictement croissante, $f(x)$ sera négatif sur $[5;\alpha]$ et positif sur $[\alpha;60]$
3. Le signe de $C'(x)$ dépend du signe de $f(x)$ car $C'(x) = \dfrac{f(x)}{x^2}$, on obtient le tableau de variation suivant :

x	5		α		60
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f	$C(5)$	$\searrow$	$C(\alpha)$	$\nearrow$	$C(60)$

   Avec $C(5) \simeq 4{,}32$; $C(\alpha) \simeq 1{,}3$ et $C(60) \simeq 7{,}05$
4. (a) L'équation $C(x) = 2$ admet deux solutions, l'une dans l'intervalle $[5;\alpha]$ l'autre dans l'intervalle $[\alpha;60]$.

   (b) L'équation $C(x) = 5$ admet une solution dans l'intervalle $[\alpha;60]$.

Partie B

La fonction C admet un minimum en α, le nombre de vélo à produire sera donc soit 25 soit 26. Comme $C(25) \simeq 1{,}287\,3$ et $C(26) \simeq 1{,}287\,1$, le coût moyen minimal sera atteint pour une production de 26 vélos.

Exercice 5

1. On calcule : $u_1 = 0{,}8 \times u_0 + 45 = 0{,}8 \times 150 + 45 = 120 + 45 = 165$.
   De même, $u_2 = 0{,}8 \times 165 + 45 = 132 + 45 = 177$.
2. (a) Dans l'algorithme 1, la condition de la boucle est « Tant que $U \geqslant 200$ ». Or, la valeur de U est initialisée à 150 qui est inférieur à 220 donc on n'entre jamais dans la boucle « Tant que » et la valeur de N affichée (0) n'est alors pas la bonne.
   Le bon algorithme est le 2.
   (b) On calcule les premiers termes de la suite (u_n) à la calculatrice et on trouve : $u_{12} \simeq 219{,}8$ et $u_{13} \simeq 220{,}9$ donc l'algorithme 2 affiche 13 pour valeur de N.
3. (a) • On a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 225 \\ &= 0{,}8u_n + 45 - 225 \\ &= 0{,}8\left(v_n + 225\right) - 180 \\ &= 0{,}8v_n + 180 - 180 \\ &= 0{,}8v_n \end{aligned}$$

   • De plus, $v_0 = u_0 - 225 = 150 - 225 = -75$
   Donc la suite (v_n) est géométrique de raison $q = 0{,}8$ et de premier terme $v_0 = -75$.
   (b) La suite (v_n) est géométrique de raison $q = 0{,}8$ et de premier terme $v_0 = -75$ donc, pour tout n, $v_n = v_0 \times q^n = -75 \times 0{,}8^n$.
   On a vu que $u_n = v_n + 225$ donc, pour tout n, $u_n = 225 - 75 \times 0{,}8^n$.
4. D'une année n à une année $n+1$, 20% des participants ne reviennent pas donc 80% reviennent et de plus, 45 nouveaux participants s'inscrivent chaque année ; on multipliera donc le nombre de participants de l'année n par 0,8 et on ajoutera 45 pour obtenir le nombre de participants de l'année $n+1$.
   Le nombre de participants l'année 2015 est de 150 donc le nombre de participants peut être modélisé par la suite (u_n) précédemment définie où u_n représente le nombre de participants l'année $2015 + n$.
   Pour l'année $2015 + n$, le nombre de participants est donc $u_n = 225 - 75 \times 0{,}8^n$.
   Pour tout n, $225 - 75 \times 0{,}8^n < 225$ donc le nombre de 250 participants ne sera jamais atteint ; il n'y aura donc pas lieu de refuser des inscriptions dans les années à venir.

Exercice 6

1. (a) Le graphe possède 9 sommets, il est donc d'ordre 9.
   (b) La chaîne D–M–H–R–B–V–G–L–J permet de passer par tous les sommets.
   Le graphe est donc connexe.
   (c) Les sommets H et G ne sont pas adjacents. Le graphe n'est pas complet.
2. Le graphe possède plus de deux sommets (cinq sommets) de degré impair donc il ne possède pas de chaîne eulérienne. Sarah ne pourra pas emprunter toutes les routes une et une seule fois.
3. (a) $M = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&1&1 \\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1&0&1&1 \\ 0&0&0&0&0&0&1&1&0 \\ 1&0&0&0&0&0&1&1&0 \\ 0&0&1&0&1&0&1&0&1 \\ 0&1&0&1&1&1&0&0&1 \\ 1&0&1&1&0&0&0&0&0 \\ 1&0&1&0&1&1&1&0&0 \end{pmatrix}$

(b) Le nombre de chemins de longueur 4 permettant d'aller de B à D est $M(1{,}2)^4 = 3$.
Il s'agit des chemins : B–R–H–M–D, B–V–L–M–D et B–V–J–M–D.

4. À l'aide de l'algorithme de Dijkstra on obtient le tableau suivant :

Sommets	B	D	G	H	J	L	M	R	V
B	0	∞	∞	272 (R)	∞	∞	∞	50 (B)	220 (B)
R	$\times$	∞	150 (R)	272 (R)	∞	∞	∞	$\times$	220 (B)
G	$\times$	∞	$\times$	272 (R)	∞	291 (G)	∞	$\times$	220 (B)
V	$\times$	∞	$\times$	272 (R)	412 (V)	291 (G)	670 (V)	$\times$	$\times$
H	$\times$	∞	$\times$	$\times$	412 (V)	291 (G)	567 (H)	$\times$	$\times$
L	$\times$	∞	$\times$	$\times$	412 (V)	$\times$	567 (H)	$\times$	$\times$
J	$\times$	∞	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	567 (H)	$\times$	$\times$
M	$\times$	617 (M)	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$

Le plus court chemin permettant d'aller de B à D est le chemin B-R-H-M-D.
Il faut parcourir 617 km.