LYCÉE MARIE CURIE **TES**
2019–2020

Devoir surveillé n°6 – mathématiques
19/03/2020

Exercice 1 (3 points)
Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Aucune justification n'est demandée. Une bonne réponse rapporte un point. Une mauvaise réponse, plusieurs réponses ou l'absence de réponse à une question ne rapportent ni n'enlèvent de point.
Indiquer sur la copie le numéro de la question et la réponse correspondante.

1. L'équation $\ln 5 + \ln(x+1) = 1$ a pour solution :

   (a) $x = \mathrm{e} - 6$
   (b) $x = -1$
   (c) $x = \frac{1}{5}\mathrm{e} - 1$
   (d) $x = -0{,}5$

2. Soit f la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = 2\ln(x) - x$.
   Le nombre $f'(2)$ est égal à :

   (a) -1
   (b) 0
   (c) $2\ln 2 - 2$
   (d) $2\ln 2 - 1$

3. Le plus petit entier naturel n solution de l'inéquation $2^n > 175$ est :

   (a) $n = \ln\left(\frac{175}{2}\right)$
   (b) $n = 7$
   (c) $n = 8$
   (d) $n = \ln 175 - \ln 2$

Exercice 2 (10 points)
Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[1{,}1\ ;\ 8]$ par $f(x) = \dfrac{2x-1}{\ln(x)}$.

1. Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[1{,}1\ ;\ 8]$, on a :

$$f'(x) = \frac{2\ln(x) - 2 + \frac{1}{x}}{(\ln(x))^2}$$

2. Soit h la fonction définie sur $[1{,}1\,;\,8]$ par : $h(x) = 2\ln(x) - 2 + \frac{1}{x}$.
   (a) Soit h' la fonction dérivée de h sur l'intervalle $[1{,}1\ ;\ 8]$.
   Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[1{,}1\ ;\ 8]$,

$$h'(x) = \frac{2x-1}{x^2}.$$

   (b) En déduire les variations de la fonction h sur l'intervalle $[1{,}1\ ;\ 8]$.
   (c) On admet que l'équation $h(x) = 0$ a une unique solution α sur l'intervalle $[1{,}1\ ;\ 8]$ (ce n'est donc pas à démontrer).
   Donner un encadrement de α par deux entiers consécutifs.
3. Déduire des résultats précédents le signe de $h(x)$ sur l'intervalle $[1{,}1\ ;\ 8]$.
4. À l'aide des questions précédentes, donner les variations de f sur $[1{,}1\ ;\ 8]$.