

# Chapitre :

# Suites



⊗ **Activité** : 1 et 2 page 19 (calculs de termes de suites)

## I. Suites géométriques

---

### 1. Rappels

**Définition** Une suite  $u$  est géométrique s'il existe un nombre réel  $q$  tel que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$u_{n+1} = q \times u_n$$

Le nombre  $q$  est appelé **raison** de la suite  $u$ .

**Propriété** Une suite  $u$  est géométrique de raison  $q$  si et seulement si pour tout  $n \geq 0$  on a :

$$u_n = q^n u_0$$

Plus généralement, si le premier terme est de rang  $p$ , alors pour tout  $n \geq p$ ,

$$u_n = q^{n-p} u_p$$

**Méthode** Pour démontrer qu'une suite est géométrique, il y a donc trois possibilités :

- On montre directement que le terme général s'écrit sous la forme  $u_n = q^n u_0$  (ou  $u_n = q^{n-p} u_p$ );
- On montre directement que la suite vérifie une relation de récurrence de la forme  $u_{n+1} = q \times u_n$ ;
- Si les deux cas précédents ne sont pas évidents, on exprime le quotient  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$  et on démontre que l'expression est constante (ne dépend pas de  $n$ ). Cette constante est alors la raison  $q$  de la suite  $u$ .

► **Exercices** : 1,2p26, 35,36,37,39p35

**Méthode** Pour démontrer qu'une suite **n'est pas** géométrique, on montre deux quotients de termes successifs qui n'ont pas la même valeur.

 Si on trouve deux quotients sont égaux, cela ne démontre pas que la suite est géométrique. Il faut faire un calcul général avec  $n$  quelconque (voir la méthode précédente).

► **Exercices** : 41,42,45,46p35

**Propriété** (**Variations**) Soit  $q$  une suite géométrique de raison  $q$  et de premier terme  $u_0$  **strictement positif**.

- Si  $q > 1$ , alors  $u$  est strictement croissante;
- Si  $0 < q < 1$ , alors  $u$  est strictement décroissante.

**Démonstration :** Pour déterminer les variations de la suite, on doit étudier le signe de  $u_{n+1} - u_n$ . Or, étant donné que la suite est géométrique de raison  $q$ ,  $u_{n+1} - u_n = qu_n - u_n = (q - 1)u_n = (q - 1)q^n u_0$ . Comme  $u_0 > 0$  et  $q > 0$  dans tous les cas de l'énoncé,  $q^n u_0$  est positif et le signe de  $u_{n+1} - u_n$  est donc celui de  $q - 1$ .

- Si  $q > 1$ , alors  $q - 1 > 0$ , donc  $u_{n+1} - u_n > 0$  et  $u$  est strictement croissante ;
- Si  $0 < q < 1$ , alors  $q - 1 < 0$ , donc  $u_{n+1} - u_n < 0$  et  $u$  est strictement décroissante.

**Exemple**  $u_n = \frac{1}{2} \times 2^n$  et  $v_n = 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$ .

Calculer les trois premiers termes, déterminer les variations.

► Exercices : 51,52,53,54p35

★ Approfondissement : 57,58,60p36

► Exercices : (algorithmes) 61 à 65p37

## 2. Somme de termes

⊗ **Activité :** page 20

**Propriété** | Soit  $q$  un nombre différent de 1 et  $n$  un nombre entier naturel. Alors :

$$1 + q + q^2 \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

**Démonstration :** On pose  $S = 1 + q + q^2 \cdots + q^n$ . On exprime  $qS$ , puis on soustrait  $S$ . On obtient  $qS - S = q^{n+1} - 1$ . Ainsi, puisque  $q \neq 1$ ,

$$S = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

**Propriété** | Soit  $u$  une suite géométrique de raison  $q \neq 1$ . Alors, pour tout entier naturel  $n$  :

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

De manière plus générale, pour tous entiers naturels  $n$  et  $p$  avec  $n > p$ ,

$$u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n = u_p \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q} = (\text{premier terme}) \frac{1 - q^{(\text{nombre de termes})}}{1 - q}$$

**Exemple** Exercice 68p38

► Exercices : 69,70,71p38, 73,74,75p38

► Exercices : (algo) 79p38, 80,81p38-39

## 3. Limites

⊗ **Activité :** fiche 2018\_1ES\_Acti01\_limites\_suites

**Propriété** | (**Limite de  $q^n$** ) Soit  $q$  un nombre strictement positif.

- Si  $q > 1$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$  ;

- Si  $0 < q < 1$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$  ;
- Si  $q = 1$  (cas rare), alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 1$ .

Exemple 3p27

► Exercices : 4,5p27

Remarque Notons que l'on peut effectuer des opérations avec les limites (voir seulement le livre page 25)

► Exercices : 86,87,88p39

Propriété (Limite d'une somme de termes) Soit  $u$  une suite géométrique positive de raison  $q > 0$ . On pose, pour tout entier naturel  $n$ ,  $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ .

- Si  $q > 1$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$  ;
- Si  $0 < q < 1$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = u_0 \times \frac{1}{1 - q}$ .

► Exercices : 89,90,92p39

## II. Suites arithmético-géométriques

---

Définition Une suite  $u$  est dite **arithmético-géométrique** s'il existe deux nombres  $a$  et  $b$  tels que pour tout entier naturel  $n$ ,

$$u_{n+1} = au_n + b$$

Pour déterminer la forme explicite (puis éventuellement la limite) d'une telle suite, on passe généralement par l'utilisation d'une suite géométrique  $v$  définie à partir de  $u$ .

Exemple Soit  $u_{n+1} = 0,5u_n + 2,5$  et  $u_0 = 1$ . On pose  $v_n = 5 - u_n$ . On démontre que  $v$  est géométrique de raison  $0,5$  et de premier terme  $4$ . On a alors :  $v_n = 4 \times 0,5^n = 5 - u_n$ , soit  $u_n = 5 - 4 \times 0,5^n$ .

► Exercice : 11p30

► Exercices : 96p39, 97,98,99,100p40

★ Approfondissement : 104,105pp41-42