

# Chapitre :

## Fonctions exponentielles



### I. Fonction exponentielle de base $q$

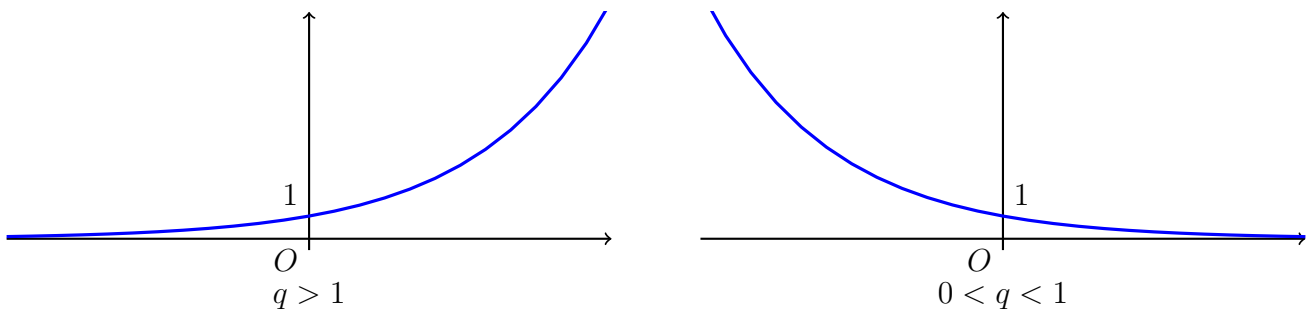
---

⊗ **Activité** : fichier geogebra avec tableur : introduction par représentation de suite géométrique.

**Définition** Soit  $q$  un réel strictement positif. La fonction  $x \mapsto q^x$  s'appelle fonction exponentielle de base  $q$ . Elle est définie, dérivable et **strictement positive** sur  $\mathbb{R}$ .

Ses variations dépendent de la valeur de  $q$  comme pour les suites géométriques.

Dans tous les cas,  $q^0 = 1$ .



On peut calculer des images de cette fonction avec la calculatrice avec la touche  $\boxed{\wedge}$  ou  $\boxed{x^y}$ .  
On admet la formule suivante, appelée **relation fonctionnelle** :

**Propriété** | Pour tous réels  $x$  et  $y$ ,

$$q^{x+y} = q^x \times q^y$$

Les propriétés déjà connues avec des entiers se prolongent donc pour des réels.

On dit que l'exponentielle transforme une somme en produit.

Par conséquent :

**Propriété** | Soit  $x$  et  $y$  des réels, soit  $m$  un entier relatif. Alors :

$$q^{-x} = \frac{1}{q^x} \quad q^{x-y} = \frac{q^x}{q^y} \quad (q^x)^m = q^{mx}$$

Enfin, on a  $q^{\frac{1}{2}} = \sqrt{q}$ .

► **Exercices** : 1,2p79 (variations et représentation)

► **Exercices** : 6 à 13 page 81, 28 à 30 page 86 (relation fonctionnelle)

## II. Fonction exponentielle de base $e$

---

⊗ **Activité** : fichier ggb montrant l'existence de la valeur de  $q$  pour laquelle le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse 0 de la courbe de la fonction exponentielle de base  $q$  vaut 1.

**Propriété** | Il existe une seule valeur du réel  $q$  telle que la tangente au point  $A(0; 1)$  à la courbe représentative de la fonction  $x \mapsto q^x$  a pour coefficient directeur 1. Cette valeur particulière du réel  $q$  est notée  $e$ . Le réel  $e$  est environ égal à 2,718 (mais n'a pas de valeur exacte sous forme décimale ou rationnelle).

**Définition** La fonction  $x \mapsto e^x$  est appelée fonction exponentielle de base  $e$  ou tout simplement exponentielle. On la note parfois  $exp$ .

**Propriété** | On a les propriétés suivantes, conséquences de celles de la section précédente :

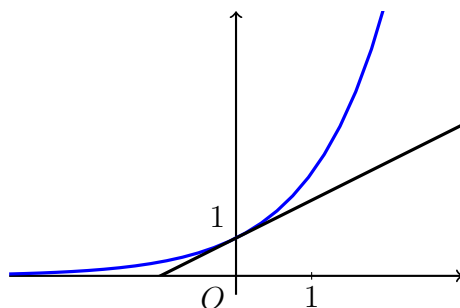
- $exp(x) = e^x$
- La fonction est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et admet 1 pour nombre dérivé en 0 ( $exp'(0) = 1$ ).
- Quelque soit le réel  $x$ ,  $e^x > 0$ .
- Quelque soient les réels  $x$  et  $y$  et l'entier relatif  $m$ ,

$$e^{x+y} = e^x \times e^y \quad e^{-x} = \frac{1}{e^x} \quad e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y} \quad (e^x)^m = e^{mx}$$

**Propriété** | pour tout réel  $x$ ,  $exp'(x) = e^x$ . Autrement dit, la fonction exponentielle est égale à sa fonction dérivée.

⚠ ce n'est valable que pour  $x \mapsto e^x$  !

En conséquence, puisque la dérivée est strictement positive (car l'exponentielle l'est), la fonction exponentielle est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ . La représentation graphique est alors ainsi :



► **Exercices** : 3,4,5p80 (étude de variations simples) et 59 à 67p88 (dérivation)

**Propriété** |

1. Pour tout réel  $x \leq 0$ ,  $0 < e^x \leq 1$  ;
2. Pour tout réel  $x \geq 0$ ,  $e^x \geq 1$  ;
3. Pour tous réels  $x$  et  $y$ ,  $e^x = e^y \Leftrightarrow x = y$  et  $e^x < e^y \Leftrightarrow x < y$ .

► **Exercices** : 44 à 47 page 87 et 52 à 55 page 87 (équations et inéquations)

# III. Exponentielle de $u$

---

**Propriété** Soit  $u$  une fonction dérivable. Alors la fonction  $e^u : x \mapsto e^{u(x)}$  est dérivable, et

$$(e^u)'(x) = u'(x) \times e^{u(x)}$$

**Exemple** Soit à dériver  $f : x \mapsto e^{3x^2+2x}$ .

► **Exercices** :

**Propriété** Soit  $u$  une fonction dérivable. Alors les fonctions  $u$  et  $e^u$  ont le même sens de variation.

**Démonstration** : En effet, le signe de la dérivée de  $e^u$  est celui de  $u'$  (voir la formule plus haut).

**Exemple** Donner les variations de la fonction  $f$  définie plus haut.

► **Exercices** : 71 à 73 page 88 (dérivation et variations)

► **Exercices** : 78,79,80 page 89 (fonctions à paramètre)

★ **Approfondissement** : 88,89,90 page 91 (exercices de type bac)