Chapitre :
Probabilités conditionnelles

∽

⊛ **Activité :** 1 puis 2 page 186

Définition On considère une expérience aléatoire et l'ensemble des issues E muni d'une loi de probabilité $\mathbb{P}$. Soit A et B deux événements de E, A étant de probabilité non nulle.
La probabilité de B sachant A (ou « sachant que A est réalisé »), notée $\mathbb{P}_A(B)$ est définie par :

$$\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$$

Remarque Avec les probabilités conditionnelles, il y a deux manières de calculer la probabilité $\mathbb{P}(A \cap B)$:

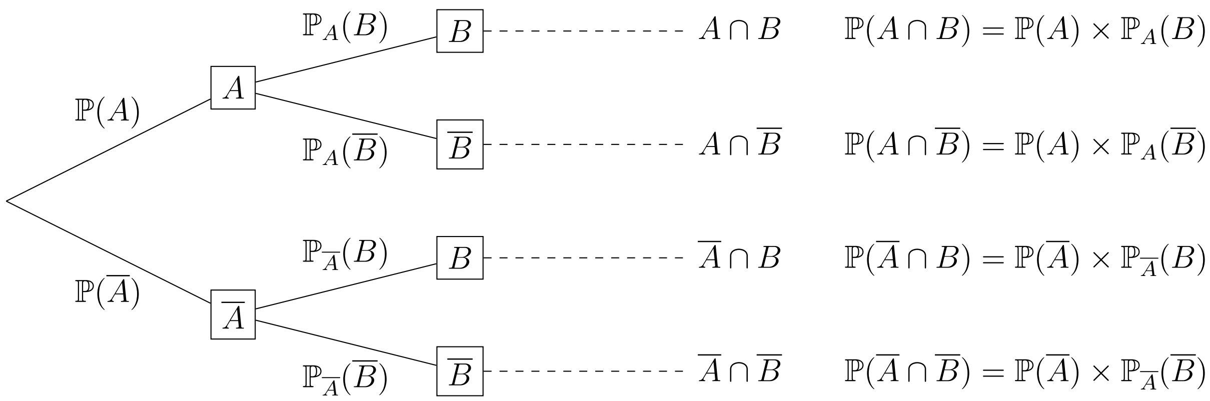
$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}_A(B) \times \mathbb{P}(A) \text{ et } \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}_B(A) \times \mathbb{P}(B)$$

De plus,

$$\mathbb{P}_A(B) + \mathbb{P}_A(\overline{B}) = 1$$

où $\overline{B}$ (« non B ») est l'événement contraire de B.

Voici comment un arbre de probabilités est pondéré avec les probabilités conditionnelles :



Méthode

- La somme des branches issues d'un même nœud vaut toujours 1 ;
- On effectue le produit le long des branches ;
- Si un événement correspond à plusieurs branches, alors on ajoute les probabilités des branches.

▶ **Exercices :** 18,19,20,21,22,23p197 (formation d'un arbre pondéré)

▶ **Exercices :** 24,25,26p197 (calculs de probabilités), 29,30,31p198 (tirages)

▶ **Exercices :** 33,34,41 p198 et suivantes (types bac)

▶ **Exercices :** 42,43,44,45p201 (avec un tableau)

▶ **Exercice :** (en DM ?) 32p198

Propriété **(Formule des probabilités totales)** On suppose que l'univers probabiliste est la réunion des événements A_1, A_2, …, A_n deux à deux incompatibles et de probabilité non nulle. Pour tout événement B on a alors :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}(A_1 \cap B) + \mathbb{P}(A_2 \cap B) + \cdots + \mathbb{P}(A_n \cap B) \\ &= \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}_{A_1}(B) + \mathbb{P}(A_2) \times \mathbb{P}_{A_2}(B) + \cdots + \mathbb{P}(A_n) \times \mathbb{P}_{A_n}(B)\end{aligned}$$

Dans le cas particulier où l'on a l'arbre plus haut, on a donc :

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(\overline{A} \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(B) + \mathbb{P}(\overline{A}) \times \mathbb{P}_{\overline{A}}(B)$$

► **Exercices :** 46,47,48,49,53,55,56 p201 et suivantes

Méthode Dans la plupart des exercices utilisant les probabilités conditionnelles, il y a toujours une question où l'on cherche à « inverser » le sens de l'arbre. Autrement dit, on cherche par exemple à savoir ce que vaut $\mathbb{P}_B(A)$.
Pour cela, il faut alors utiliser la formule $\mathbb{P}_B(A) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$, les deux probabilités nécessaires ayant généralement été calculées précédemment.
En particulier, $\mathbb{P}(A \cap B)$ a été obtenue en multipliant le long d'une branche et $\mathbb{P}(B)$ a été calculée avec la formule des probabilités totales.

► **Exercices :** 63,66,67,70 p207 et suivantes