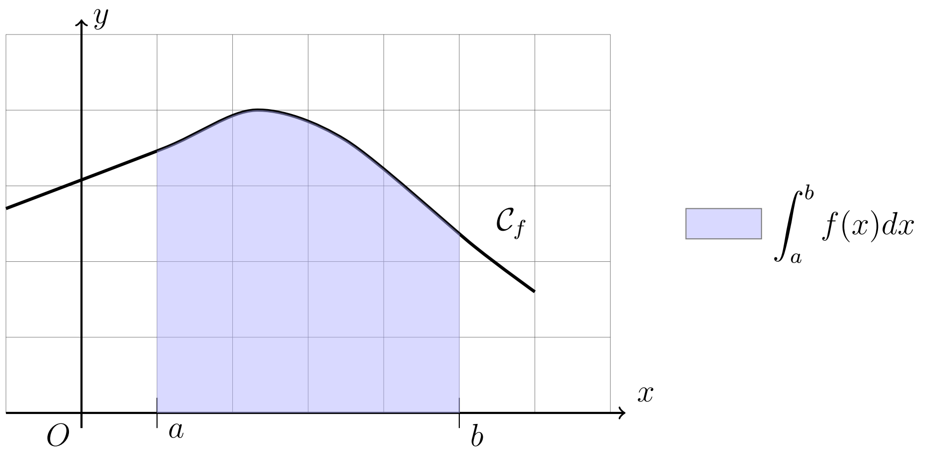
Chapitre :
Intégrales et primitives

I. Intégrale d'une fonction continue positive

Définition Soit a et b deux réels, f une fonction continue positive sur l'intervalle $[a;b]$, et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(0;I;J)$.
L'intégrale de f entre a et b est l'aire, en unités d'aires, délimitée par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses, et les droites d'équation $x=a$ et $x=b$.
Ce nombre est noté :

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$$



Remarque Le nom de la variable dans l'intégrale n'a pas d'importance :

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\mathrm{d}u$$

Le symbole de l'intégrale fait penser à un 'S' ; on peut voir cela comme la somme d'aires de rectangles de largeur presque nulle qui approximent l'aire sous la courbe.

Exemple On peut calculer sans trop de problèmes cette aire pour des fonctions affines (sur les intervalles où elles sont positives). Soit $f(x)=x+4$. Calculer $\int_{-2}^{3} f(t)\mathrm{d}t$.

▶ **Exercices :** 52,55p166

II. Fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$

Définition Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$. On considère la fonction F définie sur $[a;b]$ par :

$$F : x \mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

Propriété La fonction F est dérivable sur $[a;b]$ et a pour dérivée f : $F' = f$.
D'autre part,

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$$

Ainsi, pour calculer l'intégrale, il suffit de connaître la fonction F.

En fait, plus généralement :

Propriété Soit F une fonction dérivable telle que $F' = f$. Alors

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$$

Il suffit donc de trouver une fonction F dont la dérivée est f pour calculer l'intégrale.

Définition Soit F une fonction dérivable sur $[a;b]$ telle que $F' = f$.
On dit que F est une primitive de f sur $[a;b]$

Exemple Calculer $\int_0^1 2t\mathrm{d}t$.

Nous reviendrons plus tard sur des méthodes permettant de déterminer certaines primitives.

▶ **Exercices :** 75 à 78p168

▶ **Exercices :** activité 2p150 (éventuellement ; assez technique)

III. Déterminer des primitives

⊛ **Activité :** 1p150
Nous avons vu dans la section précédente qu'une fonction F dérivable telle que $F' = f$ est appelé **primitive** de f.

1. Recherche de primitives

Nous donnons ici des résultats permettant d'obtenir des primitives de certaines fonctions.

Propriété Soit F et G des primitives de f et g.
Alors $F + G$ est une primitive de $f + g$.
Soit k un réel. Alors kF est une primitive de kf.

Ces formules (évidentes à démontrer) sont les seules formules faciles pour déterminer une primitive.
Il n'y a en effet pas de formule pour le produit ou le quotient de fonctions.
On pourra cependant se référer au tableau du livre page 153 (à recopier !).
Le tableau ainsi que la proposition précédente permettent de trouver des primitives de n'importe quelle fonction polynomiale.

Exemple Soit $f : x \mapsto 5x^3 - 4x + 3$.
Pour obtenir la primitive on utilise les formules pour x^n, en conservant les constantes en tête :

On obtient $F(x) = 5 \times (\frac{1}{4}x^4) - 4 \times (\frac{1}{2}x^2) + 3x = \frac{5}{4}x^4 - 2x^2 + 3x$.

▶ **Exercices :** 1 à 11 page 158 (un maximum)

On peut également déterminer des primitives de certaines fonctions plus complexes :

- $u' \, \mathrm{e}^u$ a pour primitive e^u ;
- $\frac{-u'}{u^2}$ a pour primitive $\frac{1}{u}$.

Exemple On cherche une primitive de $g : x \mapsto \frac{4x}{(2x^2+4)^2}$.
On observe une puissance 2 au dénominateur, donc on commence par poser $u(x) = 2x^2 + 4$.
Par suite, $u'(x) = 4x$ et donc $g = \frac{u'}{u^2} = -\frac{-u'}{u^2}$ (on doit mettre en évidence la forme exacte de la forme du cours, ici $\frac{-u'}{u^2}$, en compensant si nécessaire avec une constante multiplicative, ici -1).
Alors $G = -\frac{1}{u}$, autrement dit $G(x) = -\frac{1}{2x^2+4}$.

▶ **Exercices :** page 159 (un maximum)

▶ **Exercices :** 107 à 110 page 171 (calculs d'intégrales)

2. Lien entre les primitives d'une fonction

Théorème Toute fonction f continue sur un intervalle $[a; b]$ admet des primitives sur $[a; b]$.

Propriété Soit F une primitive de f sur l'intervalle I. Alors toutes les primitives de f sur I sont les fonctions G définie sur I par $G(x) = F(x) + c$ où c est un nombre réel.

Remarque Deux primitives d'une même fonction sur un intervalle donné diffèrent donc d'une constante.

Par conséquent :

Propriété Soit f une fonction admettant des primitives sur un intervalle I. Soit x_0 un réel de I et soit y_0 un réel donné. Alors il existe une unique primitive G de f sur I telle que $G(x_0) = y_0$.

Exemple On cherche la primitive de $f(x) = 5x^2 + 3x + 2$ qui s'annule en 2.
Elle est de la forme $F(x) = 5 \times \left(\frac{1}{3}x^3\right) + 3 \times \left(\frac{1}{2}x^2\right) + 2x + c = \frac{5}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 2x + c$.
Comme $F(2) = 0$ (elle s'annule en 2), on obtient alors : $\frac{5}{3} \times 8 + \frac{3}{2} \times 4 + 4 + c = 0$.
On résout cette équation, on obtient $c = -\frac{70}{3}$.
Alors la primitive de f qui s'annule en 2 est F définie par $\frac{5}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 2x - \frac{70}{3}$.

▶ **Exercices :** 12 à 15p158 et 98p170

▶ **Exercices :** 93,94,95,96,97p169
(Penser que f est la dérivée de F, et au lien entre le signe de la dérivée et les variations de la fonction)

IV. Autres propriétés de l'intégrale

Propriété La formule suivante :

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$$

est valable quelques soient a et b dans un intervalle I dans lequel la fonction f, de signe quelconque, admet la fonction F pour primitive sur I.

Remarque En particulier, $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = -\int_b^a f(t)\mathrm{d}t$ et $\int_a^a f(t)\mathrm{d}t = 0$.

Propriété **(Linéarité)** Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a; b]$ et soit α un réel. Alors :

- $\int_a^b (f(x) + g(x))\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$;
- $\int_a^b \alpha f(x)\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

▶ **Exercices :** 118,120,122p172

Propriété **(Positivité)** Soit a et b deux réels tels que $a \leqslant b$. Si, pour tout réel $x \in [a; b]$, $f(x) \geqslant 0$, alors $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \geqslant 0$.

▶ **Exercices :** 116,117p172

Voici une conséquence de la propriété précédente :

Propriété **(Comparaison)** Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a; b]$. Si, pour tout $x \in [a; b]$, $f(x) \leqslant g(x)$, alors $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\mathrm{d}t$.

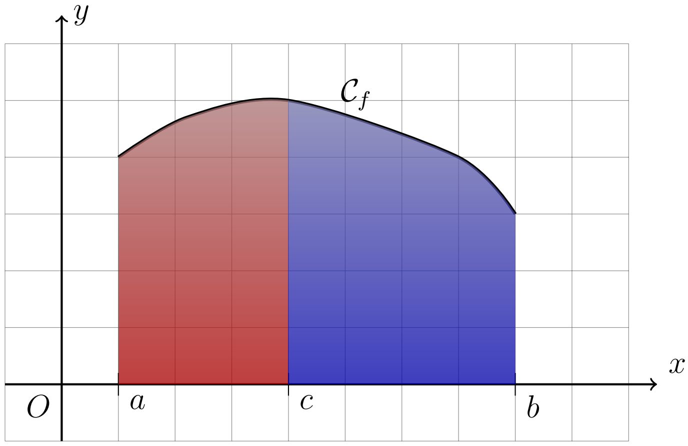
▶ **Exercices :** 133p173

Propriété **(Relation de Chasles)** Soit f une fonction continue sur $[a; b]$ et soit $c \in [a; b]$. Alors :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$

On appelle cette relation la relation de Chasles

Illustration graphique :



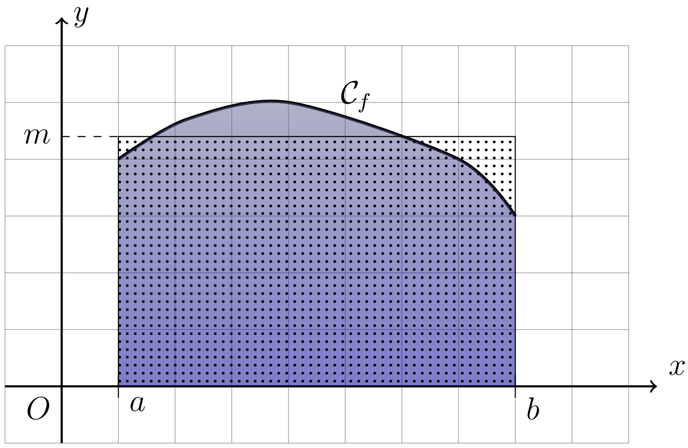
Cette propriété est utile dans le cas où l'on souhaite calculer l'intégrale d'une fonction définie par morceaux.

▶ **Exercices :** 125, 126p172

<u>Définition</u> (Valeur moyenne) Soit a et b deux réels tels que $a < b$. La valeur moyenne d'une fonction f continue sur l'intervalle $[a;b]$ est :

$$m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$$

L'interprétation graphique est la suivante :



La zone bleue et le rectangle ont la même aire. En effet, $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = m \times (b-a)$.

▶ **Exercices :** 149,151p175

★ **Approfondissement :** 104p170, 165p177