Chapitre :
Fluctuations et estimations

I. Intervalles de fluctuation

Rappel On considère une population dont une proportion p **connue** possède un caractère donné.
La variable aléatoire X qui à tout échantillon de taille n associe le nombre d'individus qui possèdent le caractère étudié suit la loi binomiale de paramètres n et p.

Définition À la variable aléatoire X on associe la variable aléatoire fréquence, $F_n = \dfrac{X}{n}$.

La variable F_n prend donc les valeurs $0, \dfrac{1}{n}, \dfrac{2}{n}, \ldots, 1$.

Définition Un intervalle de fluctuation asymptotique de la variable aléatoire F_n au seuil 0,95 est un intervalle déterminé à partir de p et n et qui contient la valeur de F_n avec une probabilité d'autant plus proche de 0,95 que n est grand. Il est donné par :

$$\left[p - 1{,}96 \times \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1{,}96 \times \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$$

Son utilisation est soumise aux conditions suivantes (à vérifier à chaque fois) :

$$n \geqslant 30 \qquad n \times p \geqslant 5 \quad \text{et} \quad n \times (1-p) \geqslant 5$$

► **Exercices :** 15,16,18,19p252

Rappel L'intervalle de fluctuation vu en seconde était le suivant :

$$\left[p - \frac{1}{\sqrt{n}} ; p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$$

Cet intervalle est plus grand que l'intervalle asymptotique, donc moins précis.
L'utilisation de cet intervalle dépend des conditions suivantes :

$$n \geqslant 25 \quad \text{et} \quad 0{,}2 \leqslant p \leqslant 0{,}8$$

Il est également possible d'obtenir un intervalle de fluctuation à l'aide de la loi binomiale, soumis celui-ci à aucune condition, mais plus difficile à obtenir (au programme de première).

Méthode La connaissance d'un intervalle de fluctuation permet une **prise de décision**.
Quand la proportion p dans la population totale est supposée connue, on peut tester l'hypothèse selon laquelle un échantillon donné est représentatif de la population totale.
Pour cela :
- On calcule la fréquence f observée pour l'échantillon ;
- On détermine l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil 0,95 ;

- Si f appartient à l'intervalle, on valide l'hypothèse faite sur la proportion p.
  Dans le cas contraire, on rejette l'hypothèse, avec un risque de 5% de se tromper.

Exemple $p = 0{,}6$, $n = 50$, $f = \dfrac{35}{50}$.
On vérifie : $n = 50 \geqslant 30$, $n \times p = 30 \geqslant 5$ et $n \times (1-p) = 20 \geqslant 5$.
On détermine l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil 0,95 : [0,4642 ;0,7358]
Or $f = \dfrac{35}{50} = 0{,}7$. Comme f appartient à l'intervalle, on valide l'hypothèse.

▶ **Exercice :** 1p246 (avec exercice résolu A de la même page)

▶ **Exercices :** 20,21p252, 23,24,25p253, (éventuellement :) 27p254

II. Intervalles de confiance

Définition Un intervalle de confiance pour une proportion p au niveau de confiance 0,95 est la réalisation, à partir d'un échantillon, d'un intervalle aléatoire contenant la proportion p avec une probabilité supérieure ou égale à 0,95

Propriété Si f est la fréquence observée sur un échantillon de taille n, on donne comme intervalle de confiance au niveau de confiance 0,95 l'intervalle suivant :

$$\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$$

Si les conditions suivantes sont vérifiées : $n \geqslant 30$, $N \times f \geqslant 5$ et $n \times (1-f) \geqslant 5$.

Cet intervalle a déjà pu être vu en seconde.

Exemple Exercice 28p254

▶ **Exercices :** 29 à 32, 36,37,38p254 (approf :) 43p255