Chapitre :
Nombres et calculs

I. Ensembles de nombres

L'ensemble des **entiers naturels** est l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers positifs ou nuls : 0 ; 1 ; 2 ; ...
L'ensemble des **entiers relatifs** est l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers positifs ou nuls et des entiers négatifs : ... ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; ...
L'ensemble des **nombres rationnels** est l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres qui peuvent s'écrire sous la forme $\frac{a}{b}$ où a appartient à $\mathbb{Z}$ et b appartient à $\mathbb{N}$ en étant non nul.
L'ensemble des **nombres décimaux** est l'ensemble $\mathbb{D}$ des nombres rationnels qui peuvent s'écrire sous la forme $\frac{a}{10^n}$ où n appartient à $\mathbb{N}$.
L'ensemble des **nombres réels** est l'ensemble $\mathbb{R}$ de tous les nombres étudiés jusqu'au début du lycée.

Définition Le symbole $\in$ se lit « appartient à » (ou « est un élément de »). Il se dit d'un nombre dans un ensemble.
Sa négation, $\notin$ se lit « n'appartient pas à ».
Le symbole $\subset$ se lit « est inclus dans » (ou « est un sous-ensemble de »). Il se dit d'un ensemble dans un ensemble.
Sa négation, $\not\subset$ se lit « n'est pas inclus dans ».

Exemples

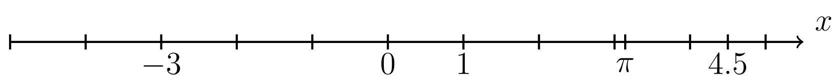
- $2 \in \mathbb{N}$
- $-3 \in \mathbb{Z}$
- $-4 \notin \mathbb{N}$
- $0{,}523 \in \mathbb{D}$
- $-\frac{5}{3} \in \mathbb{Q}$
- $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$

On a la suite d'inclusion suivante : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Il existe des nombres réels qui ne sont pas rationnels, comme $\sqrt{2}$ et π. Nous démontrerons que $\sqrt{2}$ ne l'est pas en exercice.

Exemple Figure avec les ensembles inclus les uns dans les autres, avec des exemples de valeurs (voir page 14).

Propriété Tout nombre réel est l'abscisse d'un point sur la droite numérique, autrement dit une droite orientée et graduée.



Propriété Le nombre $\frac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal.

Démonstration : On suppose, par contradiction, que $\frac{1}{3}$ est un nombre décimal. Alors il peut s'écrire sous la forme $\frac{a}{10^n}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$.

Autrement dit, $\dfrac{1}{3} = \dfrac{a}{10^n}$, donc $10^n = 3a$ (par produit en croix).
On en déduit que 10^n est un multiple de 3, autrement dit que 3 est un diviseur de 10^n. Mais alors 3 doit nécessairement diviser 10, ce qui est faux. Comme on obtient une contradiction, on en déduit que $\dfrac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal.

▶ **Exercices :** 1,2,3,4,6,7,8p15

▶ **Exercice :** 128p32 (irrationalité de $\sqrt{2}$)

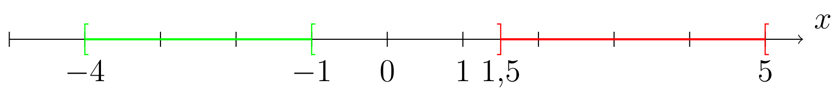
II. Intervalles et valeur absolue

Définition Un intervalle est un ensemble de nombres réels. Il y a plusieurs types d'intervalles, mais ils ont tous en commun pour leur notation deux crochets orientés, à l'intérieur desquels sont données deux valeurs, appellées **bornes** de l'intervalle, séparées par un point virgule.
Soit a et b deux nombres réels.

- L'intervalle $]a;b[$ est l'ensemble de tous les nombres réels x tels que $a < x < b$ (a et b sont exclus). On dit que cet intervalle est **ouvert**.
- L'intervalle $[a;b]$ est l'ensemble de tous les nombres réels x tels que $a \leqslant x \leqslant b$ (a et b sont inclus). On dit que cet intervalle est **fermé**.
- On définit de manière similaire des intervalles comme $[a;b[$ ou $]a;b]$ (dits semi-ouverts).
- L'intervalle $]a;+\infty[$ est l'ensemble de tous les nombres x tels que $x > a$.
- L'intervalle $]-\infty;b]$ est l'ensemble de tous les nombres x tels que $x \leqslant b$.

Le sens des crochets permet de signifier que le nombre est **compris** dans l'intervalle ou **exclu** de l'intervalle.
On peut donner un nom à un intervalle sous la forme d'une lettre majuscule, comme par exemple I.

L'infini est toujours exclu : ce n'est pas un nombre réel, un nombre réel ne vaut jamais l'infini.



Représentation des intervalles
$[-4;-1[$ (semi-ouvert) et $]1{,}5;5[$ (ouvert).
On a $\pi \in]1{,}5;5[$ car $1{,}5 < \pi < 5$, $-4 \in [-4;-1[$ mais $-1 \notin [-4;-1[$.

Définition Soit I et J deux intervalles.

- L'**union** de I et J est l'ensemble des réels qui appartiennent à I ou à J. On la note $I \cup J$.
- L'**intersection** de I et J est l'ensemble des réels qui appartiennent à la fois à I et à J. On la note $I \cap J$.

Exemples

- Intersection de $[3;6]$ et $[5;7]$
- Union de $]-2;3[$ et $]3;5[$.

▶ **Exercices :** 14,15 p17

▶ **Exercices :** 20,21p18 (union, intersection)

Définition La **valeur absolue** de x, notée $|x|$, est la distance entre x et 0 sur la droite des réels.

Définition Soit a et b deux nombres réels. Alors la **distance** entre a et b est le réel $|a-b|$.

Propriété Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$

Remarque Soit a et r deux réels avec $r > 0$. Alors $x \in [a-r; a+r] \Leftrightarrow |x-a| \geqslant r$
(Ce sont les nombres x qui sont à une distance inférieure à r de a).
On remarque que a est au « milieu » de l'intervalle $[a-r; a+r]$ (représentation !)

Exemple Le milieu de l'intervalle $[-2; 4]$ est 1. On a alors : $x \in [-2; 4] \Leftrightarrow x \in [1-3; 1+3] \Leftrightarrow |x-1| \leqslant 3$.

▶ **Exercices :** 22 à 29 p18

▶ **Exercice :** TP encadrement de $\sqrt{2}$ par balayage (graphique, calculatrice, algo, python)
Nécessite d'avoir vu les fonctions et l'usage des calculatrices pour cela.
Voir Math'x, page 63

III. Arithmétique

Définition Soit a et b deux nombres entiers relatifs. Le nombre a est un diviseur de b lorsqu'il existe un entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que $b = k \times a$.
On dit alors que b est un multiple de a, que a divise b, que b est divisible par a.

Exemple 5 est un diviseur de 15 car $15 = 3 \times 5$.

Définition Un nombre entier $z \in \mathbb{Z}$ est :

- **pair** lorsqu'il existe un entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que $z = 2 \times k$;
- **impair** lorsqu'il existe un entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que $z = 2 \times k + 1$.

En particulier, un nombre pair est un multiple de 2.

Exemple Le nombre 15 est impair car $15 = 2 \times 7 + 1$, et 12 est un nombre pair car $12 = 2 \times 6$.

Propriété Soit $a \in \mathbb{Z}$. Alors a^2 est impair si et seulement si a est impair.
De manière équivalente, a^2 est pair si et seulement si a est pair.

Démonstration : Voir le livre page 28 (nécessite de connaître les identités remarquables).

Théorème Soit $a \in \mathbb{Z}$. Si b et b' sont des multiples de a, alors $b + b'$ est un multiple de a.

Démonstration : Il suffit d'écrire ce que tout cela signifie par définition.

Définition Un entier naturel non nul est dit premier s'il possède deux (et seulement deux) diviseurs positifs distincts, à savoir 1 et lui-même.

Exemple Les plus petits entiers naturels premiers sont 2, 3, 5, 7, 11.

Remarque Le nombre 1 n'est pas premier car 1 ne possède qu'un seul diviseur positif : 1 (qui est lui-même).

▶ **Exercices :** 112,114,115,116,118,119,122,123p29

▶ **Exercices :** (algo, en séance de groupe, avec fiche algo) 113p29, déterminer si un entier est premier.

★ **Approfondissement :** 128p32 (démonstation que $\sqrt{2}$ est irrationnel)

IV. Règles de calcul

1. Racine carrée

Définition Soit a un nombre réel positif. La **racine carrée** de a, notée $\sqrt{a}$, est l'unique nombre réel positif dont le carré est égal à a.
Autrement dit, quelque soit $a \geqslant 0$, $\sqrt{a} \geqslant 0$ et $(\sqrt{a})^2 = a$.

Exemples $\sqrt{0} = 0$, $\sqrt{1} = 1$, $\sqrt{9} = 3$.

Propriété Soit a et b deux nombres positifs. Alors :

- $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$
- Si $b \neq 0$, $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.
- Si a et b sont non nuls, $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$

Propriété Quelque soit le nombre réel a, $\sqrt{a^2} = |a|$ (la valeur absolue de a).

Pour plus de détails, voir le manuel page 19.

▶ **Exercices :** 34 à 40 page 20

2. Fractions

Rappel Pour additionner deux fractions, il faut qu'elles soient au même dénominateur.
Pour cela, on peut utiliser la règle suivante :
quelque soit les réels a, b et c avec b et c non nuls,

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times c}{b \times c}$$

Exemples Quand un des dénominateurs est un multiple de l'autre, on fait comme cela :

$$\begin{aligned}\frac{1}{3} + \frac{5}{6} &= \frac{1 \times 2}{3 \times 2} + \frac{5}{6} \\ &= \frac{2}{6} + \frac{5}{6} \\ &= \frac{2+5}{6} \\ &= \frac{7}{6}\end{aligned}$$

On recherche un multiple commun aux dénominateur, dans le pire cas c'est le produit des dénominateur, comme ci-dessous :

$$\begin{aligned}\frac{5}{3} + \frac{7}{2} &= \frac{5 \times 2}{3 \times 2} + \frac{7 \times 3}{2 \times 3} \\ &= \frac{10}{6} + \frac{21}{6} \\ &= \frac{31}{6}\end{aligned}$$

Rappel Pour multiplier deux fractions, on applique la règle :

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$$

Exemple On a $\frac{5}{4} \times \frac{7}{4} = \frac{5 \times 7}{4 \times 4} = \frac{35}{16}$

▶ **Exercices :** 45,46,47 page 20 puis 50,51,52 page 21

3. puissances

Définition Soit a un nombre réel. Alors $a^2 = a \times a$.
Pour tout entier $n \geqslant 0$, a^n est égal au produit répété n fois de a par lui-même. Autrement dit,

$$a^n = \underbrace{a \times \cdots \times a}_{n \text{ facteurs}}$$

Deux cas particuliers à connaître : $a^0 = 1$ et $a^1 = a$.
Enfin, pour tout entier $n \geqslant 1$, $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

Exemples On a $2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$.
On a $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

Propriété Quelque soient le réel a et les entiers m et n,

$$a^m \times a^n = a^{n+m}$$

$$(a^m)^n = a^{m \times n}$$

▶ **Exercices :** 53,54,55,60 page 21

4. Identités remarquables, développement et factorisation

Propriété Soit a et b deux nombres réels. Alors :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \qquad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \qquad (a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

Ces trois formules sont appelées identités remarquables, et sont à connaître par cœur.

Pour des exemples et plus de précision, voir le livre page 22.

Définition
- Développer, c'est transformer un produit en somme.
- Factoriser, c'est transformer une somme en produit.

Ainsi, utiliser les identités remarquables de la gauche vers la droite c'est développer, et les utiliser de la droite vers la gauche c'est factoriser.

▶ **Exercices :** 61,62 page 22, 63,64,65 page 23
Pour factoriser et développer, il existe d'autres formules :

$$k(a+b) = ka + kb \qquad \text{(simple distributivité)}$$

$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd \qquad \text{(double distributivité)}$$

Même chose : si on va de gauche à droite on développe, si on va de droite à gauche on factorise.

Exemples Développer :
- $3(2x+7) = 3 \times 2x + 3 \times 7 = 6x + 21$
- $(2x-3)^2 = (2x)^2 - 2 \times 2x \times 3 + 3^2 = 4x^2 - 12x + 9$
- $(2x+3)(x-2) = (2x) \times x + (2x) \times (-2) + 3 \times x + 3 \times (-2) = 2x^2 - 4x + 3x - 6 = 2x^2 - x - 6$

Méthode Pour factoriser, on cherche généralement un **facteur commun**, autrement dit une expression (un nombre) qui se retrouve en facteur dans chaque terme de la somme. S'il n'y en a pas, on cherche à observer (et à mettre en évidence) une identité remarquable.

Exemples Factoriser :
- $3x^2 - 2x = 3x \times x - 2 \times x = (3x-2)x$ (factorisation par x, commun aux deux termes)
- $3(x+2) + (x+2)(x-5) = (x+2)(3+(x-5)) = (x+2)(x-2)$ (factorisation par $(x+2)$)
- $4x^2 - 9 = (2x)^2 - 3^2 = (2x-3)(2x+3)$ (identité remarquable qu'il faut mettre en évidence)

▶ **Exercices :** 71,76p24