

Chapitre :

Vecteurs

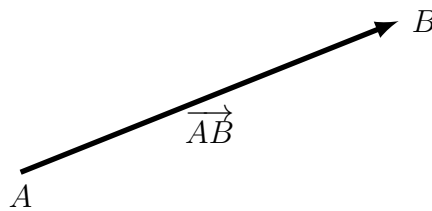


⊗ **Activité** : 2p170 puis A page 172

I. Définitions

Définition Soit A et B deux points du plan. La notation \overrightarrow{AB} se dit « vecteur AB ». Il est représenté par une flèche. On dit que A est l'**origine** et que B est l'**extrémité**. Un vecteur est caractérisé par trois choses :

- Sa **direction**, c'est à dire celle de la droite (AB) ;
- Son **sens**, celui de A vers B ;
- Sa longueur, ou **norme**, celle de $[AB]$, à savoir AB .



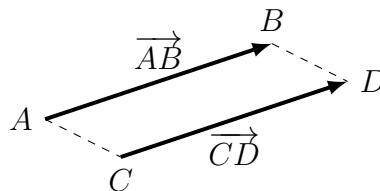
Définition Si $A = B$, alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AA}$. Ce vecteur particulier est appelé vecteur nul ; on le note $\vec{0}$.


Définition On dit que \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{CD} sont égaux si les trois propriétés suivantes sont satisfaites :

- les directions sont les mêmes, c'est à dire $(AB) \parallel (CD)$;
- les sens sont les mêmes (le sens de A vers B est le même que le sens de C vers D) ;
- les longueurs sont les mêmes, c'est à dire $AB = CD$

De manière équivalente :

Propriété | $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si $ABDC$ est un parallélogramme.

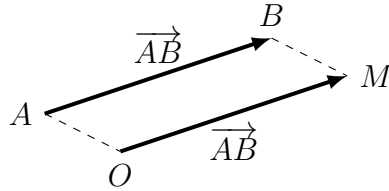


 L'ordre des points est très important !

Remarque Quand on a un parallélogramme, on peut alors en déduire plusieurs égalités de vecteurs. Dans le cas de $ABDC$, comme sur la figure ci-dessus, on a en particulier aussi $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.

Propriété | Soit \overrightarrow{AB} un vecteur et O un point. Il existe **un unique** point M tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OM}$.

C'est le point M tel que $ABMO$ est un parallélogramme :



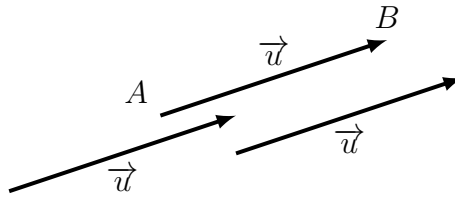
On peut dire aussi que M est l'image de O par la translation de vecteur \overrightarrow{AB} .

Remarque Il est important de noter que si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, l'objet \overrightarrow{AB} est le même objet que \overrightarrow{CD} , bien que les points A et B ne soient pas les points C et D .

On peut nommer un vecteur par une seule lettre (minuscule) surmontée d'une flèche.

Par exemple \vec{v} , \vec{u} .

On peut alors représenter un vecteur à plusieurs endroits du plan, il s'agit toujours du même objet.



Définition Le vecteur \overrightarrow{BA} est appelé vecteur opposé du vecteur \overrightarrow{AB} .

On le note aussi $-\overrightarrow{AB}$.

Il est de même direction et de même longueur que le vecteur \overrightarrow{AB} , mais de sens contraire.

Propriété | Soit A et B deux points du plan.

$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$ si et seulement si M est le milieu de $[AB]$.

► Exercices : 15,18p183, 27,28p184, 30,31,33p185

► Exercices : 36(c),38p186

II. Somme de vecteurs

Pour faire la somme de deux vecteurs, on représente ces deux vecteurs de manière que l'origine de l'un soit l'extrémité de l'autre. La somme est alors le vecteur dont l'origine est l'origine du premier et l'extrémité est l'extrémité du second.

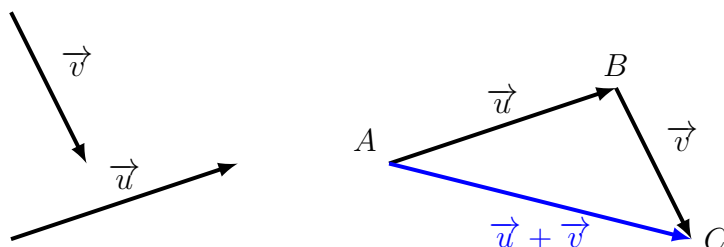
Méthode Pour faire la somme de \vec{u} et \vec{v} :

On choisit un point A .

On construit le point B tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$.

On construit ensuite le point C tel que $\overrightarrow{BC} = \vec{v}$.

Alors $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.



Propriété (Relation de Chasles) Soit A, B et C trois points du plan. Alors :

$$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$$

c'est la **relation de Chasles**.

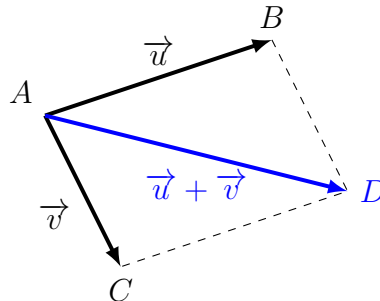
! Bien faire attention à avoir le même point entourant un signe + pour appliquer cette relation. Ça ne fonctionne en particulier pas avec un signe -.

Parfois, on souhaite faire la somme de deux vecteurs qui ont la même origine, c'est à dire $\vec{AB} + \vec{AC}$. Il s'agit alors d'une autre propriété :

Propriété (règle du parallélogramme) Pour tous points A, B et C du plan,

$$\vec{AB} + \vec{AC} = \vec{AD}$$

où D est le point tel que $ABDC$ est un parallélogramme.



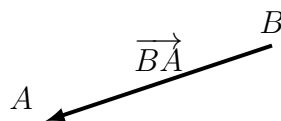
Démonstration : Comme $ABDC$ est un parallélogramme, on a $\vec{AC} = \vec{BD}$, et donc, en utilisant la relation de Chasles :

$$\vec{AB} + \vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BD} = \vec{AD}$$

Remarque Quelque soit A et B , $\vec{AB} + \vec{BA} = \vec{AA} = \vec{0}$.

Cela explique pourquoi \vec{BA} est l'opposé de \vec{AB} .

On note $\vec{AB} + \vec{BA} = \vec{AB} + (-\vec{AB}) = \vec{AB} - \vec{AB} = \vec{0}$.



Remarque Avec la règle du parallélogramme, on peut remarquer que l'on a :

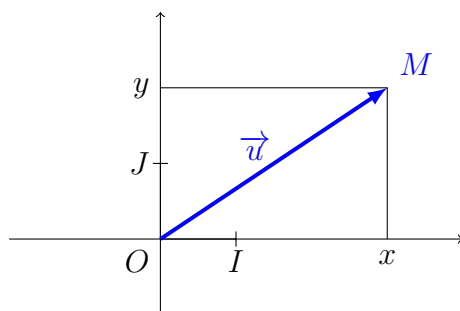
$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$$

► **Exercices** : 16p183, 39,40,41p186, 42,43,45p187

III. Coordonnées

Définition Dans un repère $(O; I; J)$, les coordonnées d'un vecteur \vec{u} sont celles du point M tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$.

On peut noter $\overrightarrow{OM}(x; y)$ ou $\overrightarrow{OM} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.



Exemple le vecteur nul $\vec{0}$ a pour coordonnées $(0; 0)$.

On note $\vec{u}(x; y)$ pour désigner le vecteur \vec{u} de coordonnées $(x; y)$. On peut aussi noter : $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

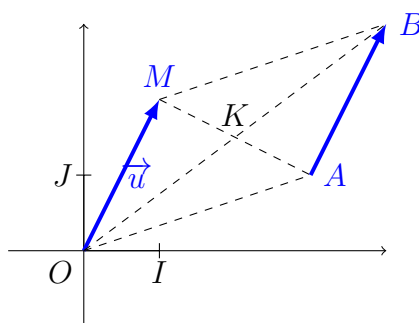
Propriété Les vecteurs $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$ sont égaux si et seulement si

$$x = x' \text{ et } y = y'$$

Théorème Soit $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points dans le repère $(O; I; J)$. Alors :

$$\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A)$$

Démonstration : Soit M tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$. Les coordonnées de M sont celles de \overrightarrow{AB} par définition. De plus, $OMBA$ est un parallélogramme. Donc $[AM]$ et $[OB]$ ont le même milieu K .



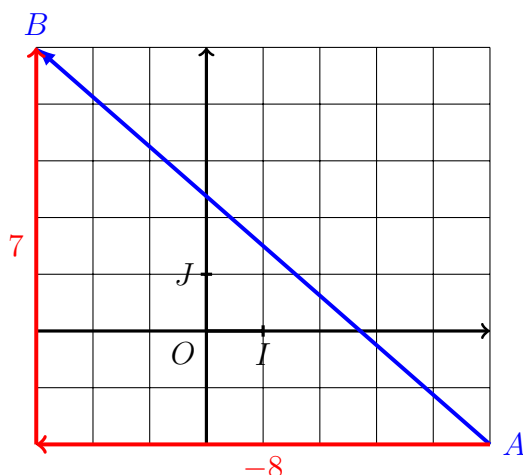
Donc $x_K = \frac{x_M + x_A}{2} = \frac{x_B + x_O}{2} \Leftrightarrow x_M + x_A = x_B \Leftrightarrow x_M = x_B - x_A$.

On fait de même avec les ordonnées.

Exemple Si $A(5; -2)$ et $B(-3; 5)$, alors $\overrightarrow{AB}(-3 - 5; 5 - (-2))$, soit $\overrightarrow{AB}(-8; 7)$.

Remarque On peut « lire » les coordonnées des vecteurs sur un repère, en les comprenant comme le déplacement à faire pour aller de l'origine à l'extrémité, selon l'axe des abscisses puis selon celui des ordonnées.

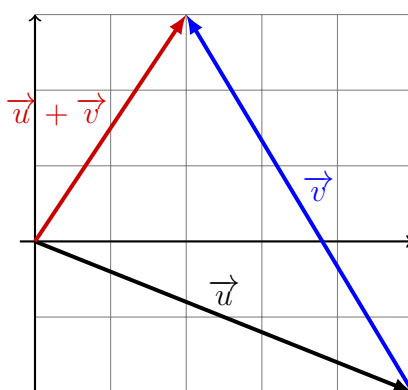
Voyons en effet la figure dans le cas de l'exemple que l'on vient de voir :



On lit bien que les coordonnées de \overrightarrow{AB} sont $(-8; 7)$.

Théorème | Soit $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$. Alors $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées $(x + x'; y + y')$.

Exemple Soit $\vec{u}(5; -2)$ et $\vec{v}(-3; 5)$, et $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$. Alors $\vec{w}(2; 3)$.



Remarque On a $-\vec{u}(-x; -y)$ (car $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$)

► **Exercices** : 50,51 page 188, 59 page 189, 63 page 190

► **Exercice** : 53 page 188 (voir l'exemple ci-dessous pour la méthode à appliquer)

Exemple Soit $\vec{u}(2; -3)$ et $\vec{v}(x - 1; y + 3)$ tels que $\vec{u} = \vec{v}$. On cherche x et y .
Comme $\vec{u} = \vec{v}$, on en déduit que $2 = x - 1$ et $-3 = y + 3$ (leurs coordonnées sont égales).
Alors $x = 2 + 1 = 3$ et $y = -3 - 3 = -6$.

► **Exercice** : 56 page 189 (voir l'exemple ci-dessous pour la méthode à appliquer)

Exemple On souhaite savoir si $ABCD$ est un parallélogramme, sachant que $A(1; 2)$, $B(5; -1)$, $C(7; 2)$ et $D(3; 5)$.

On sait que $ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

Or d'une part $\overrightarrow{AB}(5 - 1; -1 - 2)$, donc $\overrightarrow{AB}(4; -3)$ et d'autre part $\overrightarrow{DC}(7 - 3; 2 - 5)$, donc $\overrightarrow{DC}(4; -3)$.

Les deux vecteurs ont les mêmes coordonnées, donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

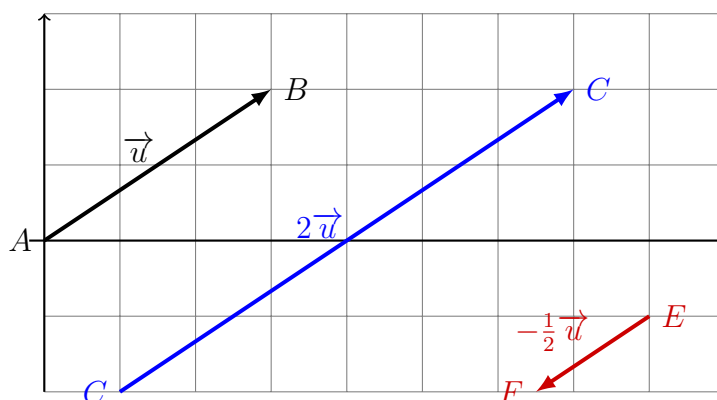
On en déduit que $ABCD$ est un parallélogramme.

IV. Produit par un nombre réel ; colinéarité

⊗ **Activité** : A page 196

Définition Soit \vec{u} un vecteur de coordonnées $(x; y)$ et k un réel. On note $k\vec{u}$ le vecteur de coordonnées $(kx; ky)$.

Exemple Soit $\vec{v}(3; 2)$. Alors $2\vec{v}(2 \times 3; 2 \times 2)$, soit $2\vec{v}(6; 4)$. De même, $-\frac{1}{2}\vec{v}\left(-\frac{3}{2}; -1\right)$.



Graphiquement, Soit \vec{AB} un vecteur non nul, k un réel non nul. Notons $\vec{CD} = k\vec{AB}$. Alors (CD) et (AB) sont parallèles et :

- Si $k > 0$, alors \vec{CD} et \vec{AB} sont de même sens et $CD = kAB$
- Si $k < 0$, alors \vec{CD} et \vec{AB} sont de sens contraire et $CD = -kAB$

Définition On dit que deux vecteurs sont colinéaires s'ils ont la même direction, autrement dit si les droites qu'ils portent sont parallèles.

Nous avons vu que si $\vec{CD} = k\vec{AB}$, alors \vec{CD} et \vec{AB} ont la même direction, donc ils sont colinéaires. Nous admettons la réciproque, c'est à dire le théorème suivant :

Théorème \vec{AB} et \vec{CD} sont colinéaires si et seulement si il existe un réel k tel que

$$\vec{CD} = k\vec{AB}$$

Remarque On peut démontrer que deux droites sont parallèles en démontrant que deux vecteurs sont colinéaires.

Autre conséquence importante :

Propriété Soit A, B et C trois points du plan.

A, B et C sont alignés si et seulement si il existe un réel k tel que $\vec{AC} = k\vec{AB}$.

Propriété Soit $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$.

\vec{u} et \vec{v} sont colinéaires si et seulement si $xy' - yx' = 0$.

Démonstration : Cela vient du fait que les coordonnées sont colinéaires. En effet, il existe k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$, autrement dit

$$x' = kx \text{ et } y' = ky$$

Donc (dans le cas où x et y ne sont pas nuls) $k = \frac{x'}{x} = \frac{y'}{y}$, et par produit en croix :

$$x'y = xy' \Leftrightarrow xy' - yx' = 0$$

Si jamais $y = 0$ (resp. $x = 0$), alors $y' = 0$ (resp. $x' = 0$) et donc $xy' - yx'$ vaut bien 0.

Définition Le nombre $xy' - yx'$ est appelé **déterminant** des vecteurs $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$.

On note $\det(\vec{u}; \vec{v}) = xy' - yx'$ le déterminant de \vec{u} et \vec{v} .

Ainsi, d'après la proposition précédente, les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires si et seulement si $\det(\vec{u}; \vec{v}) = 0$.

- ▶ Exercices : 23 à 25 page 207
- ▶ Exercices : 26,27,29 à 32 page 207
- ▶ Exercices : 41,42 page 208
- ▶ Exercices : 67,68 page 211
- ▶ Exercices : 49 page 209 et 70,71 page 211 (algorithmes)