Chapitre :
Fonctions

∽

I. Généralités

⊛ **Activité :** 1 à 3 page 38 puis A page 40

1. Définitions

Définition Soit $\mathcal{D}$ une partie de $\mathbb{R}$ (le plus souvent un intervalle ou une union d'intervalles). Définir une fonction f c'est associer à tout nombre x de $\mathcal{D}$ un **unique** nombre réel $f(x)$.
On dit que $\mathcal{D}$ est l'ensemble de définition de f, on le note parfois $\mathcal{D}_f$.
On dit que $f(x)$ est l'**image** de x (par f). Pour tout x de $\mathcal{D}$, l'image de x est donc unique.

Exemple On peut définir une fonction à l'aide d'une expression littérale (qui utilise la lettre x, appelée variable). Soit par exemple f, la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$. C'est la fonction qui à tout nombre positif associe sa racine carrée.

On note $f : x \mapsto \sqrt{x}$.
L'image de 4 par la fonction f est $f(4) = \sqrt{4} = 2$.

Définition Soit f une fonction définie sur un ensemble $\mathcal{D}$. Soit y un nombre réel. Un **antécédent** de y pour la fonction f est un nombre x tel que $f(x) = y$.

Remarque Un antécédent est un « x » (alors que l'image est un « y » ou « $f(x)$ »).

Méthode Chercher un antécédent revient à chercher un « x », et par suite à résoudre une équation.

Exemple Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$. Chercher un antécédent de 4 par f c'est chercher les nombres x tels que $f(x) = 4$. On remplace $f(x)$ par son expression, puis on résout cette équation.
On a $f(2) = 4$ et $f(-2) = 4$. Ainsi, 2 et -2 sont tous les deux des antécédents de 4.
Le nombre -4 n'a pas d'antécédent par f car pour tout nombre réel, $f(x) = x^2 \geqslant 0$.

Remarque l'image d'un nombre est unique, mais un nombre peut avoir aucun, un seul ou plusieurs antécédents.

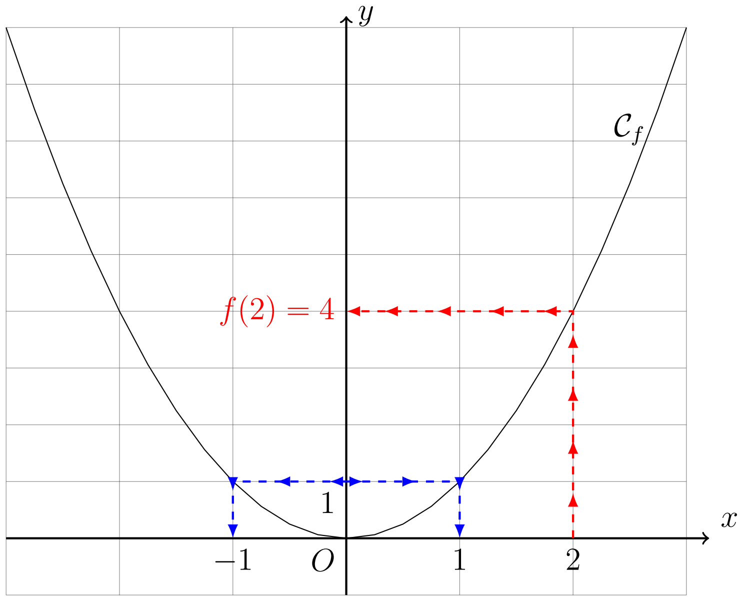
Définition Soit f une fonction définie sur un ensemble $\mathcal{D}$. La **représentation graphique** de f dans un repère est l'ensemble des points de coordonnées $(x; f(x))$ pour tout x de $\mathcal{D}$. On note parfois $\mathscr{C}$ ou $\mathscr{C}_f$ cette courbe. On associe cette courbe à l'équation $y = f(x)$ (y est l'ordonnée, x l'abscisse).

Pour construire une représentation graphique d'une fonction f, il faut dresser un **tableau de valeurs** de la fonction f, c'est à dire calculer l'image $f(x)$ de plusieurs nombres x de $\mathcal{D}$.

Exemple (Exercice 18p53) Représentation graphique de la fonction $f : x \mapsto x^2$ sur $[-3; 3]$.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x) = x^2$	9	4	1	0	1	4	9

Exemple de calcul : $f(-3) = (-3)^2 = 9$.
On peut obtenir un tableau de valeur avec la calculatrice (voir sur les rabats du manuel).
Représentation et lectures graphiques :



2 a pour image 4 par f : $f(2) = 4$.
1 a pour antécédents -1 et -1 par f : $f(-1) = f(1) = 1$.

⚠ Une lecture graphique des images (et des antécédents) ne donne que des valeurs approchées.

▶ **Exercices :** 30,31,32,33 pages 54,55

▶ **Exercices :** 35,36,37,39,40 pages 56,57

<u>Définition</u> (Parité) Soit f une fonction définie sur un intervalle I centrée en 0. On dit que :
- f est paire si, pour tout $x \in I$, $f(-x) = f(x)$.
- f est impaire si, pour tout $x \in I$, $f(-x) = -f(x)$.

Propriété
- f est paire si et seulement si $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- f est impaire si et seulement si $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'origine du repère.

Connaître la parité d'une fonction permet de compléter sa courbe représentative à partir d'une partie seulement.
Voir l'exemple page 45.

▶ **Exercices :** 21p53, 46p58 42p58

2. Résolutions graphiques

<u>Méthode</u> Soit f une fonction définie sur un ensemble D, soit k un nombre réel. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = k$ revient à déterminer les antécédents de k par f.
Pour cela :
- On trace une droite parallèle à l'axe des abscisses passant par les points d'ordonnée k ;
- On détermine les points d'intersection entre $\mathcal{C}_f$ et la droite ;
- On trace des segments parallèles à l'axe des ordonnées depuis les points d'intersection jusqu'à l'axe des abscisses pour déterminer les valeurs x des abscisses des points d'intersections.
  Ces valeurs sont les solutions de l'équation.

Voir page 46 un exemple.

<u>**Méthode**</u> Soit f et g deux fonctions définies sur un ensemble D. Résoudre l'équation $f(x) = g(x)$ revient à déterminer les valeurs de x qui ont la même image par f et par g.
Pour cela :

- On détermine les points d'intersection entre les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$;
- On trace des segments parallèles à l'axe des ordonnées depuis ces points d'intersection jusqu'à l'axe des abscisses pour lire les valeurs x des abscisses des points d'intersection.
  Ces valeurs sont les solutions de l'équation.

⚠ Ne pas oublier de tracer les droites et les segments de lecture graphique dans une copie de devoir, même si on ne les trace pas sur une courbe tracée sur le manuel.

► **Exercices :** 29p54, 50p59, 52,53 (uniquement graphiquement) p60, (éventuellement) 61p62

II. Variations de fonctions

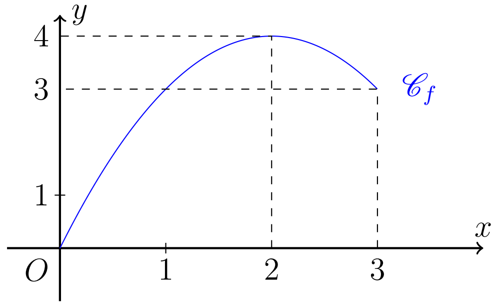
Définition Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

- On dit que f est **croissante** sur I lorsque : si x augmente, alors $f(x)$ augmente.
- On dit que f est **décroissante** sur I lorsque : si x augmente, alors $f(x)$ diminue.
- On dit qu'une fonction est **monotone** si elle ne change pas de sens de variation.

On peut indiquer les variations d'une fonction à l'aide d'un tableau de variations :

x	0		2		3
variations de f	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	3

Tableau de variation



Courbe représentative

Définition Le **maximum** d'une fonction f est la plus grande des valeurs prises par $f(x)$.
Le **minimum** d'une fonction f est la plus petite des valeur prises par $f(x)$.
Un **extremum** est un nombre qui est soit un maximum, soit un minimum.

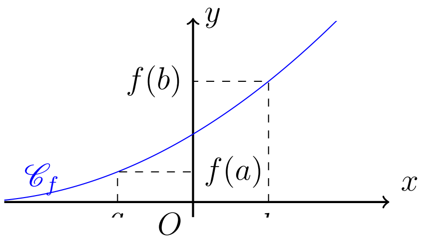
Exemple Dans l'exemple précédent, le minimum est 0 et le maximum est 4.
Le minimum est atteint en $x = 0$, le minimum est atteint en $x = 2$.

► **Exercices :** 27p80, 28-31p81

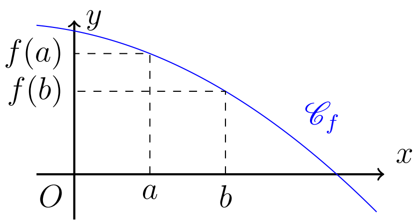
Voici des définitions plus rigoureuses pour les variations et les extremums :

Définition Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
On dit que f est croissante sur I si quels que soient a et b dans I tels que $a < b$ on a $f(a) \leq f(b)$.
On dit que f est décroissante sur I si quels que soient a et b dans I tels que $a < b$ on a $f(a) \geq f(b)$.

Autrement dit, une fonction croissante conserve le sens de l'inégalité, alors qu'une fonction décroissante change le sens de l'inégalité.



Fonction croissante
$a < b$ et $f(a) \leqslant f(b)$



Fonction décroissante
$a < b$ et $f(a) \geqslant f(b)$

Si les inégalités entre les images de $f(a)$ et $f(b)$ sont toujours strictes, on dit que f est strictement croissante (ou décroissante).

► **Exercices :** 22-24,26p80, 20,21p79 (pour ces derniers, voir les pages 72 et 73)

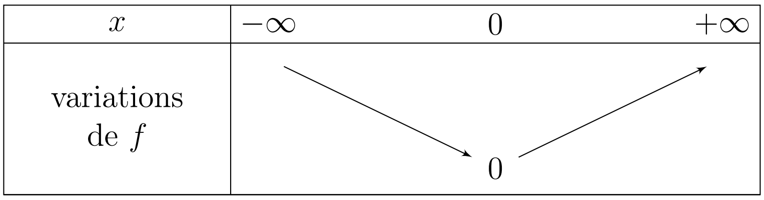
III. Fonctions de référence

L'ensemble des fonctions qui sont données ici sont à connaître, en particulier leur représentation graphique.

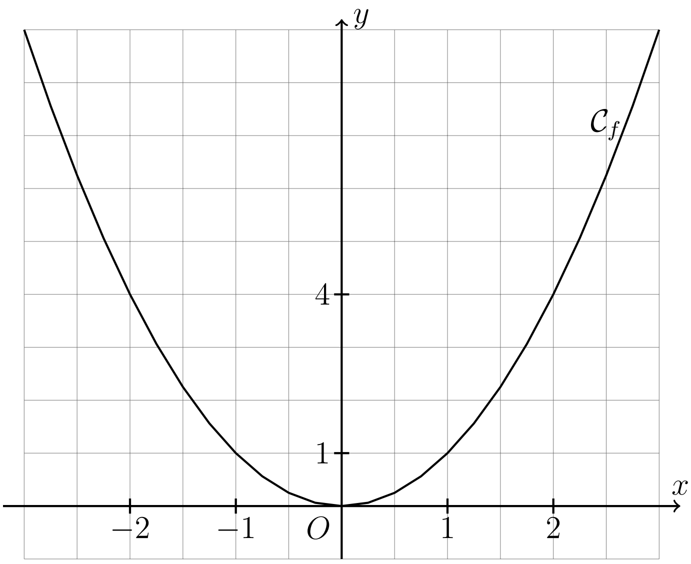
1. Fonction carré

Définition La fonction carrée est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

Propriété La fonction carrée est strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$ puis strictement croissante sur $[0; +\infty[$. Elle admet pour minimum 0 en $x = 0$.



x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	9	4	1	0	1	4	9



La courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, parce que f est paire ($f(-x) = f(x)$).

Définition On appelle **parabole** la courbe représentative de la fonction carré. Son extremum est appelé le **sommet** de la parabole. Les parties de courbe qui partent du sommet sont appelées **branches** de la parabole.

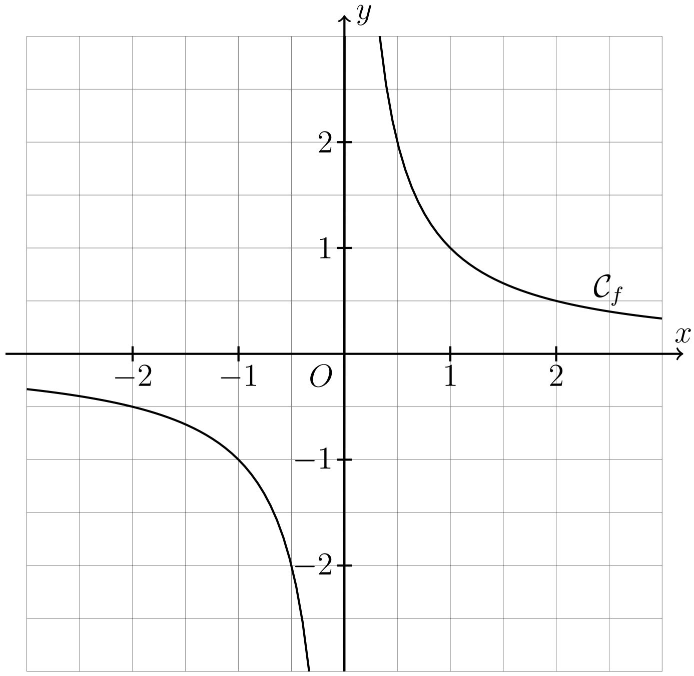
2. Fonction inverse

Définition La fonction inverse est la fonction f définie sur $\mathbb{R}^\star =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

Propriété La fonction inverse est décroissante sur $]-\infty; 0[$ et encore décroissante sur $]0; +\infty[$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
variations de f		$\searrow$	$\|$	$\searrow$	

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	2
$f(x)$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	2	1	$\frac{1}{2}$



La courbe est symétrique par rapport à l'origine du repère car f est impaire ($f(-x) = -f(x)$).

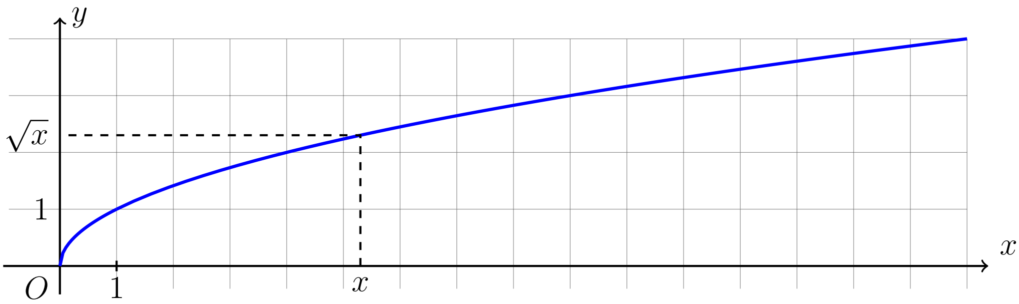
Définition On appelle la courbe représentative de la fonction inverse une **hyperbole**.

3. Fonction racine carrée

Rappel La racine carrée d'un nombre positif x est le nombre positif dont le carré est x.
On note $\sqrt{x}$ la racine carrée de x. On a donc par définition $(\sqrt{x})^2 = x$.

Définition La fonction racine carrée est la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par : $x \mapsto \sqrt{x}$.

Sa courbe représentative est la suivante :



Remarque il s'agit d'une branche de parabole « couchée » (x étant le carré de $\sqrt{x}$).

Propriété La fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.
Autrement dit on a le tableau de variation suivant :

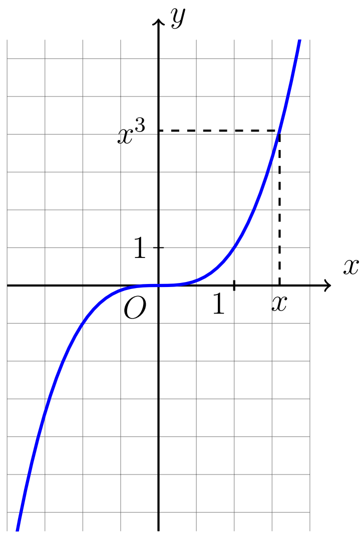
x	0	$+\infty$
$\sqrt{x}$	0 ↗	

Cela signifie par définition que pour tous réels positifs a et b tels que $0 \leqslant a \leqslant b$, alors $0 \leqslant \sqrt{a} \leqslant \sqrt{b}$.

4. Fonction cube

Définition La fonction cube est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto x^3$.

La fonction cube est impaire ($f(-x) = -f(x)$) donc l'origine O est un centre de symétrie pour sa courbe représentative :



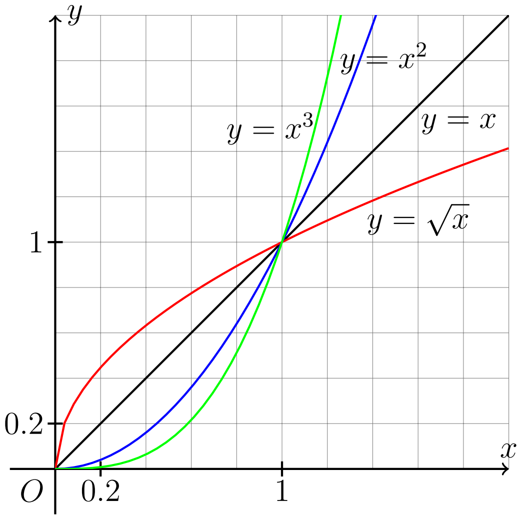
Propriété La fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x^3	↗	0	↗

5. Applications

Propriété On considère l'équation $x^2 = a$ avec $a \in \mathbb{R}$. Alors :
- si $a < 0$, l'équation n'a pas de solution.
- si $a = 0$, l'équation a pour unique solution $x = 0$.
- si $a > 0$, l'équation a deux solutions : $a = \sqrt{a}$ et $a = -\sqrt{a}$.

Propriété **(Comparaison des courbes sur** $[0; +\infty[$**)**
Observons sur un même repère les courbes représentatives des fonctions de références (sauf la fonction inverse), avec celle de la fonction i définie par $i(x) = x$:



Cette représentation permet d'observer les propriétés suivantes :

- Si $0 < x < 1$, alors $x > x^2 > x^3$.
- Si $x > 1$, alors $x < x^2 < x^3$.
- L'égalité $x = x^2 = x^3$ a lieu pour $x = 0$ et pour $x = 1$.

D'autre part, concernant la racine carrée :

- Si $0 < x < 1$, alors $\sqrt{x} > x$
- Si $x > 1$, alors $\sqrt{x} < x$.
- L'égalité $x = \sqrt{x}$ a lieu pour $x = 0$ et pour $x = 1$.

On peut observer également que les courbes d'équation $y = x^2$ et $y = \sqrt{x}$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

▶ **Exercices :** 20-24p131

▶ **Exercice :** (algorithme) 73p136