Chapitre :
Probabilités

I. Expérience aléatoire

⊛ **Activité :** A pages 294

Définition Une **expérience aléatoire** est un processus qui peut être répété, dont le résultat n'est pas connu à l'avance, mais dont l'ensemble des résultats possibles est connu.
l'ensemble des résultats possibles, appelé **univers**, est parfois noté E ou Ω.
On appelle **issue** un résultat possible.

Exemple On lance un dé et on regarde le résultat. L'univers est l'ensemble $\{1;2;3;4;5;6\}$.

Exemple On lance deux dés et on fait la somme. L'univers est l'ensemble $\{2;3;\ldots;12\}$.

Définition On appelle **événement** tout sous-ensemble (partie) de l'univers E.
Un **événement élémentaire** est un événement composé d'une seule issue. On peut décrire un événement à l'aide d'une phrase.

Exemple Dans l'expérience aléatoire du jet d'un dé, on peut considérer :
- l'événement « obtenir un 2 ». Il correspond à l'ensemble $\{2\}$, c'est donc un événement élémentaire.
- l'événement « obtenir un nombre pair ». Il correspond à l'ensemble $A = \{2;4;6\}$, ce n'est pas un événement élémentaire.

Définition Soit A un événement.
L'**événement contraire** (ou complémentaire) de A, noté $\overline{A}$ et lu « non A » (ou « A barre ») est l'ensemble des issues de E qui ne sont pas dans A.

Exemple L'événement contraire de « obtenir un 2 » est « ne pas obtenir de 2 ».
Il correspond à l'ensemble $\{1;3;4;5;6\}$.
L'événement contraire de « obtenir un nombre pair » est « obtenir un nombre impair ».
Il correspond à l'ensemble $\overline{A} = \{1;3;5\}$.

Définition On dit de deux événements qu'ils sont **incompatibles** s'ils n'ont pas d'issue en commun.
Deux événements contraires sont donc en particulier incompatibles.

Exemple Les événements « obtenir un 2 » et « obtenir un nombre impair » sont incompatibles (mais ne sont pas contraires).

Rappel Un jeu de 32 cartes est composé de :
- Quatre couleurs (carreau, trèfle, cœur, pique)
- Dans chaque couleur, une carte de chacune des valeurs différentes : valet, dame, roi (qui sont appelées figures) ainsi que des cartes numérotées de 7 à 10 et enfin l'as (numéroté 1).

Dans un jeu de 52 cartes, on ajoute dans chaque couleur des cartes numérotées de 2 à 6.
Voir l'exercice 37 page 310 pour voir l'apparence complète d'un jeu de 32 cartes.

Méthode Dans certains cas, il peut être pratique d'utiliser un arbre (de dénombrement) pour visualiser toutes les issues possibles. Voir par exemple la page 301.

► **Exercices :** 17,21,22,23p309, 37,38,39p310, 41p311

II. Loi de probabilité

1. Cas général

Sur l'ensemble $E = \{e_1; \ldots; e_n\}$, univers de l'expérience aléatoire, on veut pouvoir exprimer la fréquence d'apparition théorique de chaque issue.
On définit alors sur E une fonction de probabilité, notée P, de sorte que :
Pour tout élément e_i de E, $P(e_i) \geq 0$ et la somme des $P(e_i)$ vaut 1 :

$$P(e_1) + \cdots + P(e_n) = 1$$

Définir la fonction P, c'est donner la **loi de probabilité** sur E. Elle est souvent donnée sous forme de tableau, associant à chaque issue sa probabilité.

Définition La probabilité d'un événement A de E est la somme des probabilités des issues de A.

Exemple La probabilité d'obtenir un nombre pair avec un jet de dé à six faces est :

$$P(\text{« obtenir un nombre pair »}) = P(2) + P(4) + P(6)$$

On déduit des définitions ci-dessus que pour tout événement A, on a $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$.

Propriété Soit A un événement de E. Alors :

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1$$

Ainsi, si l'on connaît la probabilité d'un événement A, on obtient celle de l'événement contraire $\overline{A}$ par la formule $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

Définition On dit qu'un événement est **impossible** si sa probabilité vaut 0.
On dit qu'un événement est **certain** si sa probabilité vaut 1.

2. Cas particulier : équiprobabilité

Dans certains cas, on estime que les probabilités de toutes les issues sont les mêmes. On dit que les issues sont **équiprobables**. C'est le cas lorsque l'on considère que le dé est « **équilibré** », ou bien que l'on tire (une carte, une boule dans une urne) « **au hasard** ».
On dit alors que la loi est **équirépartie**.
Si l'univers E contient n éléments, et si la loi est équirépartie, alors toute issue e a la probabilité $P(e) = \dfrac{1}{n}$.

Exemple pour revenir à l'exemple précédent, si le dé est équilibré, la loi est équirépartie. Donc :

$$P(\text{« obtenir un nombre pair »}) = P(2) + P(4) + P(6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

Propriété On peut simplifier le calcul des probabilités dans le cas d'équiprobabilité. Soit A un événement de E dont la loi est équirépartie. Alors :

$$P(A) = \frac{\text{nombre d'éléments de } A}{\text{nombre d'éléments de } E}$$

Exemple Dans notre exemple, l'événement « obtenir un nombre pair » représente l'ensemble $\{2; 4; 6\}$ qui contient 3 éléments. L'ensemble E contient lui 6 éléments.
On a donc $P(A) = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$.

▶ **Exercices :** 27,28p309, 42,44,46,47,48p311, 49,50p312

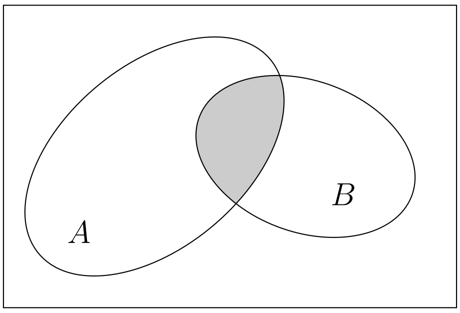
▶ **Exercices :** 51,52,54p312, 55,56,57,58p313

III. Union et intersection d'événements

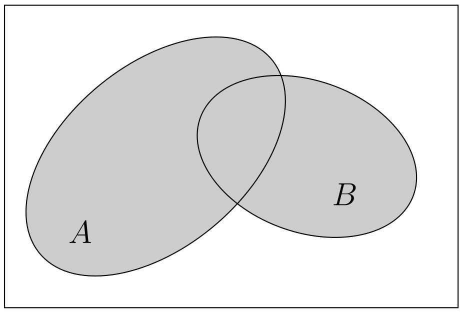
⊛ **Activité :** B page 295

Définition Soit A et B deux événements. On définit les événements :
- « A et B », noté $A \cap B$ et prononcé aussi A inter(section) B, l'événement contenant les issues qui sont à la fois dans A et dans B.
- « A ou B », noté $A \cup B$ et prononcé aussi A union B, l'événement contenant les issues qui sont dans A ou dans B (éventuellement les deux).

On peut visualiser chacun des deux événements à l'aide d'un diagramme (dit de Venn) :



$A \cap B$

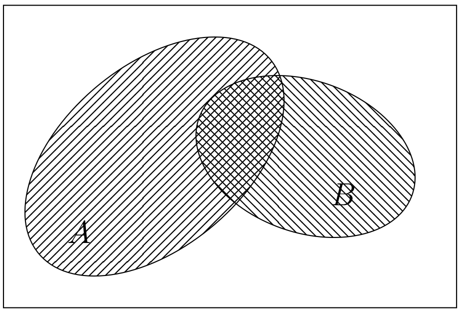


$A \cup B$

Propriété Quels que soient les événements A et B, on a :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Démonstration : Un dessin suffit à comprendre cette formule : en ajoutant $P(A)$ et $P(B)$, on compte deux fois $P(A \cap B)$, il faut donc la soustraire une fois.



▶ **Exercices :** 67p314, 68,69,70,72,73p315, 74,75,76,77,78p316