LYCÉE MARIE CURIE **MATHCO**
2020–2021

Devoir surveillé n°1
Correction

Exercice 1

1. $f(x) = 5x^3 - 3x^2 + 2x - 1$ alors $f'(x) = 15x^2 - 6x + 2$
2. $g(x) = (5x+3)\,\mathrm{e}^x$; g est de la forme uv avec $u(x) = 5x+3$ et $v(x) = \mathrm{e}^x$.
   Alors $u'(x) = 5$, $v'(x) = \mathrm{e}^x$. Comme $(uv)' = u'v + uv'$, on a :
   $g'(x) = 5\,\mathrm{e}^x + (5x+3)\,\mathrm{e}^x = (5 + 5x + 3)\,\mathrm{e}^x = (5x+8)\,\mathrm{e}^x$.
3. $h(x) = \mathrm{e}^{x^2}$; h est de la forme e^u avec $u(x) = x^2$.
   Alors $u'(x) = 2x$. Comme $(\mathrm{e}^u)' = u'\,\mathrm{e}^u$, on a :
   $h'(x) = 2x\,\mathrm{e}^{x^2}$.
4. $m(x) = \sqrt{5x-2}$; m est de la forme $\sqrt{u}$ avec $u(x) = 5x-2$.
   Alors $u'(x) = 5$. Comme $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$, on a :
   $m'(x) = \dfrac{5}{2\sqrt{5x-2}}$.

Exercice 2

1. $A(x) = \dfrac{2x-3}{\mathrm{e}^{-3x}}$.
   Comme une exponentielle est toujours positive, le signe de $A(x)$ est seulement celui de $2x-3$.
   Or $2x - 3 > 0 \Leftrightarrow 2x > 3 \Leftrightarrow x > \dfrac{3}{2}$.
   On obtient alors le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
Signe de $A(x)$		$-$	0	$+$	

2. $B(x) = -7(5x^2 + 3x - 2)$
   B est un produit. Le nombre -7 est toujours négatif. Étudions le signe de $5x^2 + 3x - 2$, expression polynomiale de degré 2.
   On calcule : $\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \times 5 \times (-2) = 9 + 40 = 49 = 7^2 > 0$. Il y a donc deux racines : $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-3-7}{10} = -1$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-3+7}{10} = \dfrac{2}{5}$.
   Comme $a = 5 > 0$, on obtient les signes suivants :

x	$-\infty$		-1		$\frac{2}{5}$		$+\infty$
signe de -7		$-$		$-$		$-$	
signe de $5x^2+3x-2$		$+$	0	$-$	0	$+$	
signe de $B(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{-x^2+8x-13}{x^2-4x+5}$.

1. f est de la forme $\dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = -x^2+8x-13$ et $v(x) = x^2-4x+5$. Alors $u'(x) = -2x+8$ et $v'(x) = 2x-4$.
   Comme $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v-uv'}{v^2}$, on a :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{(-2x+8)(x^2-4x+5)-(-x^2+8x-13)(2x-4)}{(x^2-4x+5)^2} \\
&= \frac{(-2x^3+8x^2-10x+8x^2-32x+40)-(-2x^3+4x^2+16x^2-32x-26x+52)}{(x^2-4x+5)^2} \\
&= \frac{-2x^3+8x^2-10x+8x^2-32x+40+2x^3-4x^2-16x^2+32x+26x-52}{(x^2-4x+5)^2} \\
&= \frac{-4x^2+16x-12}{(x^2-4x+5)^2}
\end{aligned}$$

   Or $-4(x-1)(x-3) = -4(x^2-3x-x+3) = -4(x^2-4x+3) = -4x^2+16x-12$.
   Ainsi, on a bien $f'(x) = \dfrac{-4(x-1)(x-3)}{(x^2-4x+5)^2}$.

2. Le dénominateur étant un carré, il est positif. Il suffit donc d'étudier le signe du numérateur qui est un produit.
   - -4 est toujours négatif
   - $x-1>0 \Leftrightarrow x>1$
   - $x-3>0 \Leftrightarrow x>3$

   On en déduit le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
signe de -4		$-$		$-$		$-$	
signe de $x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

3. On en déduit le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
variations de f		$\searrow$	-3	$\nearrow$	1	$\searrow$	