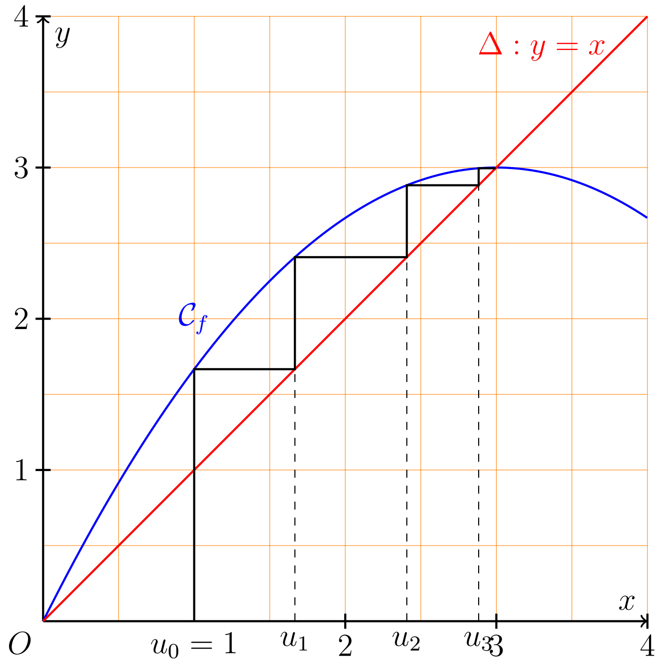
LYCÉE MARIE CURIE **MATHCO**
2020–2021

Devoir surveillé n°2 Mathématiques
Correction - Groupe 2

Exercice 1

1. On a :
   - $u_0 = 1$
   - $u_1 = -\dfrac{1}{3} \times 1^2 + 2 \times 1 = \dfrac{5}{3}$
   - $u_2 = -\dfrac{1}{3} \times \dfrac{25}{9} + 2 \times \dfrac{5}{3} = \dfrac{-25+90}{27} = \dfrac{65}{27} \simeq 2{,}4074$
2. (a) Voici la figure demandée :



   (b) Voir la question précédente.
3. La suite u semble croissante.
4. La suite semble converger vers 3.

Exercice 2

1. On a :

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{(n+1)+1} - \frac{1}{n+1} \\
&= \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1} \\
&= \frac{n+1-(n+2)}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{-1}{(n+1)(n+2)}
\end{aligned}$$

2. Comme $n \in \mathbb{N}$, on a $(n+1)(n+2)$ positif. Alors $u_{n+1} - u_n = \dfrac{-1}{(n+1)(n+2)}$ est négatif.

   On en déduit que la suite u est décroissante.

3. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} n+1=+\infty$, On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0$.

Exercice 3

1. En notant $v_n=3\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$, on observe que : $S_n=v_0+v_1+v_2\cdots+v_n$.

   Or v est géométrique de raison $q=\dfrac{1}{2}$ et de premier terme $v_0=3$.

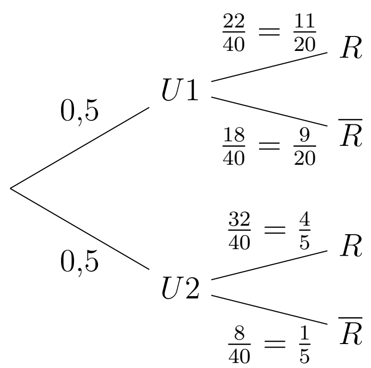
   Alors :

$$\begin{aligned}
S_n &= v_0\times\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\\
&= 3\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = 3\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}}\\
&= 3\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)\times\frac{2}{1} = 6\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)
\end{aligned}$$

2. Comme $0<\dfrac{1}{2}<1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}=0$. Par suite, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n=6\times(1-0)=6$.

Exercice 4

1. L'arbre complété est le suivant :



2. On souhaite $P_R(U1)$. Par définition, $P_R(U1)=\dfrac{P(U1\cap R)}{P(R)}$.

   Or, d'après la formule des probabilités totales,

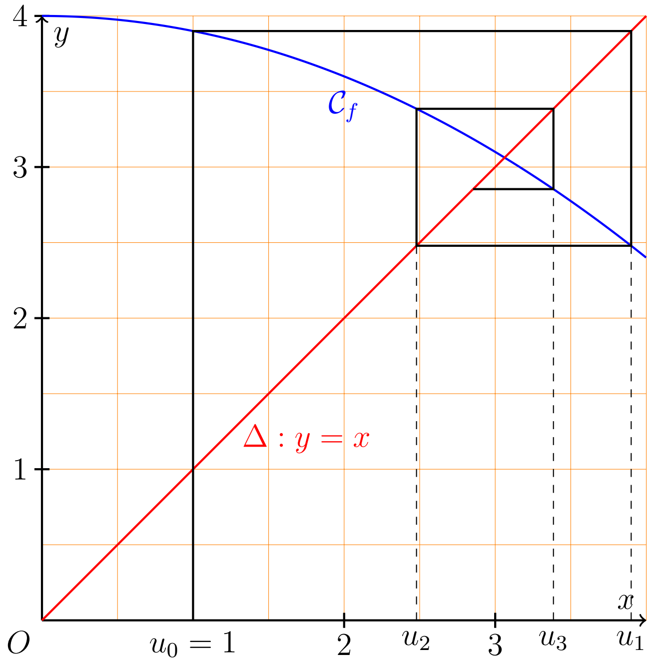
$$\begin{aligned}
P(R) &= P(U1)\times P_{U1}(R)+P(U2)\times P_{U2}(R)\\
&= 0{,}5\times\frac{22}{40}+0{,}5\times\frac{32}{40}\\
&= \frac{27}{40}
\end{aligned}$$

   De plus, $P(U1\cap R)=0{,}5\times\dfrac{22}{40}=\dfrac{11}{40}$. Alors $P_R(U1)=\dfrac{\frac{11}{40}}{\frac{27}{40}}=\dfrac{11}{27}$.

Devoir surveillé n°2 Mathématiques
Correction - Groupe 1

Exercice 1

1. On a :
   - $u_0 = 1$
   - $u_1 = 4 - 0{,}1 \times 1^2 = 3{,}9$
   - $u_2 = 4 - 0{,}1 \times (3{,}9)^2 = 2{,}479$
2. (a) Voici la figure demandée :



   (b) Voir la question précédente.
3. La suite u semble non monotone.
4. La suite semble converger vers une valeur proche de 3.06 (calcul des termes à la calculatrice).

Exercice 2

1. On a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 3(n+1)^2 + (n+1) - (3n^2 + n) \\ &= 3(n^2 + 2n + 1) + n + 1 - 3n^2 - n \\ &= 3n^2 + 6n + 3 + 1 - 3n^2 \\ &= 6n + 4 \end{aligned}$$

2. Comme $n \in \mathbb{N}$, on a $6n + 4$ positif. Alors $u_{n+1} - u_n = 6n + 4$ est positif.
   On en déduit que la suite u est croissante.
3. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = \lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$, On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Exercice 3

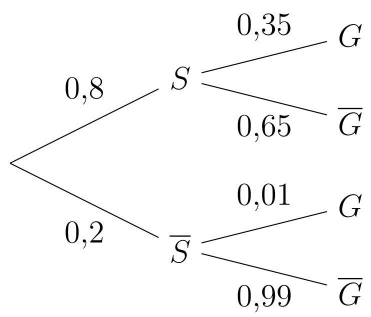
1. En notant $v_n = -2 \times 0{,}7^n$, on observe que : $S_n = v_0 + v_1 + v_2 \cdots + v_n$.
   Or v est géométrique de raison $q = 0{,}7$ et de premier terme $v_0 = -2$.
   Alors :

$$\begin{aligned} S_n &= v_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \\ &= -2 \times \frac{1-0{,}7^{n+1}}{1-0{,}7} = -2 \times \frac{1-0{,}7^{n+1}}{0{,}3} \\ &= -2 \times \frac{1-0{,}7^{n+1}}{\frac{3}{10}} = -2(1-0{,}7^{n+1}) \times \frac{10}{3} \\ &= -\frac{20}{3}(1-0{,}7^{n+1}) \end{aligned}$$

2. Comme $0 < 0{,}7 < 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}7^{n+1} = 0$. Par suite, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = -\frac{20}{3} \times (1-0) = -\frac{20}{3}$.

Exercice 4

1. L'arbre complété est le suivant :



2. On souhaite $P_G(S)$. Par définition, $P_G(S) = \dfrac{P(S\cap G)}{P(G)}$.
   Or, d'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} P(G) &= P(S) \times P_S(G) + P(\overline{S}) \times P_{\overline{S}}(G) \\ &= 0{,}8 \times 0{,}35 + 0{,}2 \times 0{,}01 \\ &= 0{,}282 \end{aligned}$$

   De plus, $P(S\cap G) = 0{,}8 \times 0{,}35 = 0{,}28$. Alors $P_G(S) = \dfrac{0{,}28}{0{,}282} = \dfrac{140}{141} \simeq 0{,}9929$.