Étude d'un signe

On rappelle qu'étudier le signe d'une dérivée f' permet de connaître les variations de la fonction f.

Les expressions dont on sait déterminer le signe sont les suivantes :

- celles de la forme $ax+b$: on résout par exemple $ax+b \geqslant 0$.
  Cela permet de savoir pour quelles valeurs de x l'expression est **positive** (supérieure à 0).

  Lorsque l'on divise par un nombre négatif, le sens de l'inégalité change !

  Exemple On souhaite étudier le signe de $-3x+15$:

  $$-3x+15 \geqslant 0 \Leftrightarrow -3x \geqslant -15 \Leftrightarrow x \leqslant \frac{-15}{-3} \text{ (division par } -3<0) \Leftrightarrow x \leqslant 5$$

  Par conséquent $-3x+15$ est positive si et seulement si x est inférieur à 5, et on obtient :

x	$-\infty$		5		$+\infty$
Signe de $-3x+15$		$+$	0	$-$	

- celles de la forme ax^2+bx+c (grâce aux racines et au signe de a) ;
  Pour obtenir les racines, on peut commencer par le calcul du discriminant $\Delta = b^2-4ac$.
  On peut se rappeler que l'expression est **généralement** du signe de a (sauf entre les éventuelles racines). Plus précisément :
  - Si $\Delta<0$, il n'y a pas de racine, et ax^2+bx+c est toujours du signe de a ;

$\Delta<0$:

cas $a<0$

x	$-\infty$	$+\infty$
Signe de ax^2+bx+c	$-$	

cas $a>0$

x	$-\infty$	$+\infty$
Signe de ax^2+bx+c	$+$	

  - Si $\Delta=0$, il y a une seule racine, $x_0 = \dfrac{-b}{2a}$, et ax^2+bx+c est toujours du signe de a (et vaut 0 en x_0) ;

$\Delta=0$:

cas $a<0$

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
Signe de ax^2+bx+c		$-$	0	$-$	

cas $a>0$

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
Signe de ax^2+bx+c		$+$	0	$+$	

  - Si $\Delta>0$, il y a deux racines, $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$, et ax^2+bx+c est du signe de a à l'extérieur des racines, du signe contraire de a entre les racines (et vaut 0 en x_1 et en x_2).

$\Delta>0$:

cas $a<0$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
Signe de ax^2+bx+c		$-$	0	$+$	0	$-$	

cas $a>0$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
Signe de ax^2+bx+c		$+$	0	$-$	0	$+$	

- Les carrés, racines carrées, exponentielles, sont toujours positifs : $(\dots)^2 \geqslant 0$, $\sqrt{\dots} \geqslant 0$, $e^{\cdots} > 0$;
- Le signe d'un **produit** ou d'un **quotient** d'expressions s'obtient grâce à un tableau de signes, après avoir étudié le signe de chacun des facteurs.

  Exemple On souhaite étudier le signe de $f'(x) = -6(x-3)(x-15)$ sur $[0;21]$.
  L'expression $f'(x)$ nous est donnée sous la forme d'un produit de trois facteurs.
  - Le nombre (-6) est (toujours) négatif ;
  - On a $x-3>0 \Leftrightarrow x>3$;
  - On a $x-15>0 \Leftrightarrow x>15$.

  Par conséquent :

x	0		3		15		21
Signe de -6		$-$		$-$		$-$	
Signe de $x-3$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $x-15$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

  Exemple On souhaite étudier le signe de $f'(x) = \dfrac{-4x+6}{(x+2)^2}$ sur $[0;10]$.
  L'expression $f'(x)$ est sous forme d'un quotient.
  - On a $-4x+6>0 \Leftrightarrow -4x>-6 \Leftrightarrow x<\dfrac{-6}{-4}\ (-4<0) \Leftrightarrow x<\dfrac{3}{2}$;
  - L'expression $(x+2)^2$ est toujours positive car c'est un carré.

  Par conséquent :

x	0		$\frac{3}{2}$		10
Signe de $-4x+6$		$+$	0	$-$	
Signe de $(x+2)^2$		$+$		$+$	
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	

- Pour une **somme**, il n'y a pas de règle comme pour le produit, donc pas de tableau de signe !
  Par contre, la somme de deux expressions positives est positive, la somme de deux expressions négatives est négative.
  Dans les autres cas, il faut chercher à factoriser (transformer la somme en produit), ou bien, en dernière extrémité, résoudre une inéquation (de la forme $E(x) \geqslant 0$).