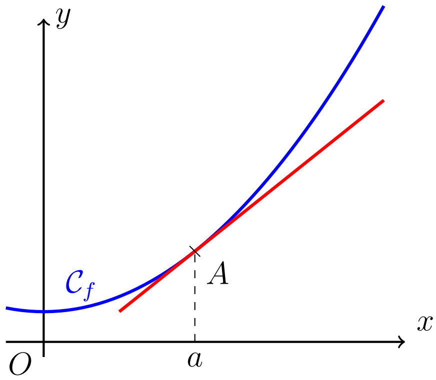
Chapitre :
Modèles définis par une fonction

I. Dérivation



<u>Définition</u> (Rappel) Soit f une fonction définie sur un intervalle I. La fonction dérivée de f sur I, si elle existe, est la fonction qui à tout nombre $a \in I$ associe le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a (donc de coordonnées $(a; f(a))$). Ce coefficient directeur, nombre dérivé de f en a, est noté $f'(a)$.
On note f' la fonction dérivée de f.
Sur la figure, la droite rouge est la tangente à la courbe de f (en bleu) au point A d'abscisse a. Son coefficient directeur est le nombre $f'(a)$.

On rappelle les formules de dérivation de première, à connaître par cœur :

Fonction	Dérivée
$f(x) = k$ sur $\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$ sur $\mathbb{R}$
$f(x) = x$ sur $\mathbb{R}$	$f'(x) = 1$ sur $\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ sur $\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$ sur $\mathbb{R}$
$f(x) = \sqrt{x}$ sur $[0; +\infty[$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ sur $]0; +\infty[$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^\star$	$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ sur $\mathbb{R}^\star$
$f(x) = \mathrm{e}^x$ sur $\mathbb{R}$	$f'(x) = \mathrm{e}^x$ sur $\mathbb{R}$

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un même intervalle I.

- $(u+v)$ est dérivable sur I et
$$(u+v)' = u' + v'$$
- uv est dérivable sur I et
$$(uv)' = u'v + uv'$$
- Cas particulier, si $v(x) = k$ (v est constante égale à k, $k \in \mathbb{R}$),
$$(ku)' = ku'$$
- $\dfrac{u}{v}$ est dérivable pour tout $x \in I$ tel que $v(x) \neq 0$ et
$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$
- Cas particulier, si $u(x) = 1$, on a $u'(x) = 0$ et donc
$$\left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{-v'}{v^2}$$

On ajoute à ces formules de première de nouvelles formules :

Propriété Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.
On pose f la fonction définie par $f(x) = (u(x))^2$.
Alors f est dérivable sur I et $f'(x) = 2 \times u'(x) \times u(x)$.
On note : $(u^2)' = 2u'u$.
De même, on a aussi $(u^3)' = 3u'u^2$.

Propriété Soit f une fonction dérivable. Soit a et b deux réels.
On définit la fonction g par $g(x) = f(ax + b)$.
Alors g est dérivable et $g'(x) = a \times f'(ax + b)$.

Propriété Soit u une fonction dérivable. On définit la fonction f par $f(x) = \mathrm{e}^{u(x)}$.
Alors $f'(x) = u'(x)\,\mathrm{e}^{u(x)}$.
Autrement dit, $(\mathrm{e}^u)' = u'\,\mathrm{e}^u$.

Voir les exemples dans le livre page 10.

▶ **Exercices :** Declic première pour de la dérivation

▶ **Exercices :** 35p21, 29p20, 45-48p22
L'utilité de la dérivée se trouve dans l'étude des variations des fonctions :

Propriété Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
- f est croissante sur I si et seulement si $f'(x) \geqslant 0$ sur I.
- f est décroissante sur I si et seulement si $f'(x) \leqslant 0$ sur I.
- f est constante sur I si et seulement si $f'(x) = 0$ sur I.

Autrement dit, il suffit d'étudier le signe de f' pour connaître les variations de f.

Il est alors important de connaître les méthodes d'étude de signes. Pour cela, voir la fiche sur les signes.

▶ **Exercices :** 25p20, 34p21 (signes)

▶ **Exercices :** 3,4p11, 49-51p22

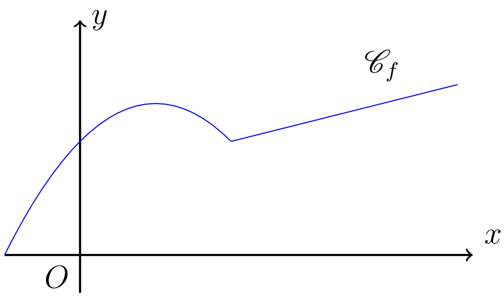
Propriété Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Soit a un réel de I.
La tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a (le point $A(a; f(a))$) est la droite passant par A et de coefficient directeur $f'(a)$.
Elle a pour équation : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

▶ **Exercice :** 1p11, 31p20

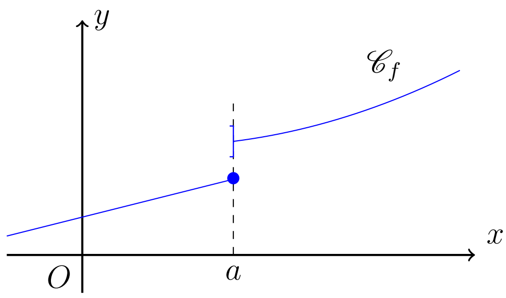
II. Continuité

⊛ **Activité :** observation de fonctions issues de la vie courante page 8

Définition Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
On dit que f est continue sur I si la représentation graphique de f sur I se fait « sans lever le crayon », autrement dit s'il n'y a pas de « saut ».



Fonction continue



Fonction non continue (en a)

▶ **Exercices :** 16,17p62

Propriété Les fonctions polynomiales et la fonction exponentielle sont continues sur $\mathbb{R}$.
La fonction inverse est continue sur $]0;+\infty[$ et sur $]-\infty;0[$.
Une fonction obtenue par opération (somme, quotient, etc.) de fonctions continues est continue sur son ensemble de définition.

Propriété Soit f une fonction. Si f est dérivable sur I, alors f est continue sur I.

Par convention, une flèche dans un tableau de variation traduit la continuité de la fonction sur l'intervalle considéré.

⊛ **Activité :** 2p9 (modélisation introduisant le TVI)

Théorème **(des valeurs intermédiaires)** Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a;b]$. Soit k un réel. Si les conditions suivantes sont remplies :

1. k compris entre $f(a)$ et $f(b)$;
2. f est continue sur $[a;b]$;

Alors l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution dans $[a;b]$.
Si de plus f est strictement monotone, alors il existe une unique solution.

▶ **Exercices :** 5,6,8p13, 52-54p22, 81p26

III. Convexité

La convexité est l'étude des différentes allures que peut avoir une courbe.

⊛ **Activité :** observer trois manières pour une fonction d'être croissante sur un intervalle.
On peut observer qu'une manière de caractériser ces allures est d'observer la position de la courbe par rapport à ses tangentes.
On pose alors la définition suivante :

Définition Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
On dit que f est **convexe** sur I si sa courbe représentative est entièrement située au dessus de chacune de ses tangentes sur I.
On dit que f est **concave** sur I si sa courbe représentative est entièrement située en dessous de chacune de ses tangentes sur I.

Propriété

- Les fonctions carré et exponentielle sont convexes sur $\mathbb{R}$.

- La fonction racine carrée est concave sur $]0;+\infty[$.

Voir page 14 les représentations graphiques de ces différentes fonctions.

Définition (Points d'inflexion) Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. S'il existe un point A de la courbe $\mathcal{C}_f$ tel que la tangente à la courbe en A traverse la courbe en A, alors on dit que A est un point d'inflexion. Un tel point correspond à un changement de convexité.

Exemple La fonction cube possède un point d'inflexion en $x = 0$ (voir la figure page 14).

Ces allures (convexe, concave) sont à reconnaître graphiquement (et à ne pas mélanger, bien entendu).

Définition L'étude de la convexité d'une fonction est la recherche des intervalles sur lesquels la fonction est convexe, mais aussi des intervalles sur lesquels elle est concave.

▶ **Exercices :** 9,10p15, 62,63p24

Pour obtenir la connaissance de la convexité d'une fonction par l'analyse, et plus seulement par lecture graphique, on utilise les propriétés suivantes :

Propriété Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.
- f est convexe sur I si et seulement si f' est croissante sur I.
- f est concave sur I si et seulement si f' est décroissante sur I.

▶ **Exercices :** 58-61p23

Ainsi, pour étudier la convexité d'une fonction f, il suffit d'étudier les variations de sa dérivée f'. Pour cela, il suffit en fait d'étudier le signe de la dérivée de la dérivée, que l'on appelle dérivée seconde et que l'on note f''. D'après la propriété précédente, et d'après le lien entre f' et f'', on obtient :

Propriété Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur un intervalle I.
- f est convexe sur I si et seulement si $f''(x) \geqslant 0$ sur I.
- f est concave sur I si et seulement si $f''(x) \leqslant 0$ sur I.

Propriété Soit f deux fois dérivable sur I. Si f' change de variation en un réel a de I, autrement dit si f'' change de signe en a, alors f admet un point d'inflexion au point d'abscisse a.

▶ **Exercices :** 13,14p17, 64,66,67,68p24

★ **Approfondissement :** choix d'un exercice (ou deux) dans les pages 30-33 (travail en groupe, avec éventuellement présentation aux autres)