Chapitre :
Statistiques

∽

Rappel Pour ceux qui en ont besoin, deux vidéos d'explication sur les moyennes, médianes et étendues de séries statistiques, par Yvan Monka : vidéo 1 et vidéo 2.

▶ **Exercices :** (sur Labomep) : Moyenne et médiane (rappels)

I. Moyenne pondérée et écart-type

Définition Supposons qu'un caractère statistique étudié prenne p valeurs x_1,...,x_p avec des effectifs respectifs n_1, ..., n_p. On note N l'effectif total ($N = n_1 + \cdots + n_p$).
La **moyenne pondérée** de la série, notée $\overline{x}$ est donnée par :

$$\overline{x} = \frac{n_1 x_1 + \cdots + n_p x_p}{N}$$

Exemple On considère les résultats d'un groupe d'élèves à un devoir surveillé. On obtient le tableau statistique suivant :

Note	05	08	09	11	12	14	15	17
Effectif	1	1	2	1	2	1	1	1

La note moyenne est alors :

$$\overline{x} = \frac{1 \times 5 + 1 \times 8 + 2 \times 9 + 1 \times 11 + 2 \times 12 + 1 \times 14 + 1 \times 15 + 1 \times 17}{10} = 11{,}2$$

Propriété On a les règles de calcul suivantes pour la moyenne :
- Si on multiplie toutes les valeurs par un nombre a, alors la moyenne est multipliée par a ;
- Si on ajoute une valeur b à toutes les valeurs, alors la moyenne est augmentée de b ;
- Plus généralement, les valeurs $ax_i + b$ ont pour moyenne $a\overline{x} + b$.

Définition Avec les mêmes notations que précédemment, on définit la variance, notée V, par :

$$V = \frac{n_1(x_1 - \overline{x})^2 + \cdots + n_p(x_p - \overline{x})^2}{N}$$

Ensuite, on définit l'écart-type, noté σ, par : $\sigma = \sqrt{V}$.

L'écart-type permet de mesurer la dispersion des valeurs autour de la moyenne : plus l'écart-type est grand, plus les valeurs sont dispersées (écartées) autour de la moyenne.

Exemple Dans notre exemple, :

$$\sigma = \sqrt{\frac{1(5 - 11{,}2)^2 + 1(8 - 11{,}2)^2 + 2(9 - 11{,}2)^2 + \cdots + 1(17 - 11{,}2)^2}{10}} \simeq 3{,}4$$

On peut obtenir ces valeurs à l'aide de la calculatrice.
Pour cela, voir le manuel page 308 pour Casio et TI et page 366 pour Numworks.

▶ **Exercices :** (sur Labomep) : Moyenne et écart-type

▶ **Exercices :** 33,34,35p312

II. Médiane et quartiles

Définition La **médiane** d'une série est la plus petite valeur du caractère notée Me telle que au moins 50% des individus ont une valeur du caractère inférieure ou égale à Me.
Cette définition n'est pas exactement celle du collège (ni même du lycée), mais c'est celle que nous utiliserons ici.

La médiane ne se calcule pas, mais se détermine. Pour cela on s'aider du tableau des effectifs cumulés croissants (e.c.c.) obtenus en ajoutant petit à petit les effectifs de la gauche vers la droite, en ayant au préalable trié les **valeurs** par ordre croissant. La **médiane est la valeur** du caractère qui fait atteindre ou dépasser la moitié de l'effectif total.

Exemple On considère le même exemple que dans la section précédente :

Note	05	08	09	11	12	14	15	17
Effectif	1	1	2	1	2	1	1	1

Pour déterminer la médiane, on rajoute la ligne des effectifs cumulés croissants (e.c.c.) :

Note	05	08	09	11	12	14	15	17
Effectif	1	1	2	1	2	1	1	1
e.c.c.	1	2	4	5	7	8	9	10

On peut lire tout à droite l'effectif total : $N = 10$. La moitié est donc $0{,}5 \times N = 0{,}5 \times 10 = 5$. La valeur où cet effectif est atteint (ou dépassé) est la valeur (note) 11. Ainsi, $Me = 11$. Cela signifie qu'au moins la moitié des élèves a eu une note inférieure ou égale à 11.

Maintenant que l'on a revu la médiane sous cette forme, on peut définir de manière similaire le premier et le troisième quartile :

Définition Le **premier quartile** est la plus petite valeur du caractère notée Q_1 qui fait atteindre ou dépasser le quart des effectifs cumulés croissants. Le **troisième quartile** est la plus petite valeur du caractère notée Q_3 qui fait atteindre ou dépasser les trois quarts des effectifs cumulés croissants.

Remarque La médiane définie comme précédemment peut être considérée comme un deuxième quartile.

Exemple Dans notre exemple, $Q_1 = 09$ (valeur pour laquelle l'e.c.c. dépasse $0{,}25 \times N = 2{,}5$) et $Q_3 = 14$ (valeur pour laquelle l'e.c.c. dépasse $0{,}75 \times N = 7{,}5$).

Définition On appelle **écart interquartile** la différence $Q_3 - Q_1$.
L'**intervalle interquartile** est $[Q_1; Q_3]$.

▶ **Exercices :** (sur Labomep) : Médiane et quartiles

▶ **Exercices :** 60,61,62p315, 64p316